TEORIA DI YANG-MILLS

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{2g^2} \mathrm{tr}\left(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right) = -\frac{1}{4g^2} F^a_{\mu\nu} F^{a\,\mu\nu}$$

già interessante (anche senza materia) perché include interazioni.

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu - f^{abc} A^b_\mu A^c_\nu$$

Esiste un altro termine gauge inv., Lorentz inv. e che contenga al più 2 derivate di A_μ?

Sì:

$$I = \Theta\, \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\, \mathrm{tr}\left(F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}\right)$$

$$= 4\Theta \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\, \mathrm{tr}\left(\partial_\mu A_\nu \partial_\rho A_\sigma + 2i A_\mu A_\nu \partial_\rho A_\sigma\right)$$

$$= 4\Theta\, \partial_\rho \left\{ \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\, \mathrm{tr}\left(A_\sigma \partial_\mu A_\nu + \frac{2i}{3} A_\sigma A_\mu A_\nu\right)\right\}$$

[PASSAGGI IN RAMOND]

cioè I è una "derivata totale"

$\rightarrow$ non modifica le equazioni del moto

Ma quantisticamente è un termine importante. Viene chiamato "Θ-term".

$$A_\mu = A^a_\mu t^a_R$$

possiamo prendere qualsiasi R → usiamo la normalizz. $\mathrm{tr}\, t^a_R t^b_R = \delta^{ab}/2$

oppure usare i generatori astratti T^a $\left[\mathrm{tr}\, t^a_R = 0\right]$

Eq. del moto:

$$\delta S = -\frac{1}{2g^2}\int d^4x \, \mathrm{tr}\left(\mathbb{F}_{\mu\nu}\,\delta\mathbb{F}^{\mu\nu}\right)$$

$$\delta\mathbb{F}^{\mu\nu} = \partial^\mu \delta A^\nu + i\,\delta A^\mu A^\nu + i\,A^\mu \delta A^\nu - (\mu\leftrightarrow\nu)$$

$$\delta S = -\frac{1}{g^2}\int d^4x \, \mathrm{tr}\Big(\mathbb{F}_{\mu\nu}\big(\partial^\mu\delta A^\nu + \underbrace{i\,\delta A^\mu A^\nu}_{-i\,\delta A^\nu A^\mu} + i\,A^\mu\delta A^\nu\big)\Big)$$

Integriamo per parti, buttando via il termine di bordo (variaz. si annullano agli estremi)

$$\delta S = \frac{1}{g^2}\int d^4x \, \mathrm{tr}\Big[\Big(\partial^\mu \mathbb{F}_{\mu\nu} + i[A^\mu, \mathbb{F}_{\mu\nu}]\Big)\delta A^\nu\Big]$$

$\delta S = 0$ $\forall$ variaz. nulle agli estremi $\Leftrightarrow$ eq. Lagr.

$$\Rightarrow \quad \text{E.O.M.} \quad \partial^\mu \mathbb{F}_{\mu\nu} + i[A^\mu, \mathbb{F}_{\mu\nu}] = 0$$

$\mathbb{F}_{\mu\nu}$ sta nella rapp. Adj $\Rightarrow$ e.o.m. possono essere scritte:

$$D^\mu F_{\mu\nu} = 0 \qquad (*)$$

è COVARIANTE: se A^0_μ è soluz. di $(*)$, allora anche $A^{0\alpha}_\mu$ è soluz.

Trasformato di A^0_μ sotto una trasf. di gauge $\alpha(x)$.

cioè ogni elemento dell'ORBITA di A^0_μ è soluz.

In aggiunta $\mathbb{F}_{\mu\nu}$ soddisfa le IDENTITÀ DI BIANCHI

def. $\tilde{\mathbb{F}}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\mathbb{F}^{\rho\sigma}$; allora per def. di $\mathbb{F}^{\rho\sigma}$

$$D^\mu \tilde{F}_{\mu\nu} = 0$$

← non è un'eq. del moto, ma un'identità che A_μ soddisfa.

$\tilde{\mathbb{F}} = *\mathbb{F}$

↑ Hodge dual

Corrente conservata:

La Lagrangiana è $\mathcal{L} = -\frac{1}{4g^2} F_{\mu\nu}^{a} F^{a\mu\nu}$, $\phi_i \equiv A_\mu^a$

$$j^\mu(\epsilon) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_i}\delta_\epsilon \phi_i - \cancel{K^\mu}$$

$\mathcal{L}$ è inv.

$$= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu A_\nu^a}\delta_\epsilon A_\nu^a = -\frac{1}{g^2}F^{a\mu\nu}(D_\nu\epsilon)^a =$$

$$= -\frac{1}{g^2}F^{a\mu\nu}\left(\partial_\nu\epsilon^a - f^{abc}A_\mu^b\epsilon^c\right)$$

$$\partial_\mu j^\mu(\epsilon) = -\frac{1}{g^2}\partial_\mu F^{a\mu\nu}\left(\partial_\nu\epsilon^a - f^{abc}A_\nu^b\epsilon^c\right)$$

$$+\frac{1}{g^2}F^{a\mu\nu}f^{abc}\left(\partial_\mu A_\nu^b\,\epsilon^c + A_\nu^b\,\partial_\mu\epsilon^c\right)$$

$$= -\frac{1}{g^2}\Big(\underbrace{\partial_\mu F^{a\mu\nu} - f^{abc}F^{c\mu\nu}}_{=0 \text{ su eom}} A_\mu^b\Big)\partial_\nu\epsilon^a$$

$$+\frac{1}{g^2}\epsilon^c f^{abc}\left(\partial_\mu F^{a\mu\nu}A_\nu^b + F^{a\mu\nu}\partial_\mu A_\nu^b\right) =$$

$$\underset{\text{on-shell}}{=} \frac{1}{g^2}\epsilon^c\partial_\mu\Big(\underbrace{f^{abc}F^{a\mu\nu}A_\nu^b}_{\underset{\text{eom}}{\propto}\ \partial_\nu F^{c\mu\nu}}\Big) \underset{\text{on-shell}}{=} 0$$

$\rightsquigarrow$ On-shell $j^\mu(\epsilon) \propto \frac{1}{g^2}\partial_\nu\, \epsilon^c F^{c\mu\nu}$

$K^{\mu\nu} = \epsilon^c F^{c\mu\nu}$

$$Q(\alpha) = \int d^3x\, j^0(\alpha) = \frac{1}{g^2}\int d^3x\, \partial_i \left(F^{c0i}\alpha^c\right) \qquad i=1,2,3$$

$$= -\oint_{S^2_\infty} d\Sigma_i\, \alpha^c F^{c0i}$$

Se $\alpha(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} \text{cost}$, allora

$$Q(\alpha) = \alpha^c Q^c \qquad \text{con} \qquad Q^c = -\oint_{S^2_\infty} d\Sigma_i F^{c0i}$$

Possiamo anche definire

$$\mathbb{Q} = Q^c t^c_R$$

Allora tale oggetto trasforma come

$$\mathbb{Q} \longmapsto -\oint_{S^2_\infty} d\Sigma_i \left(U(x)\, \mathbb{F}^{0i}\, U(x)^{-1}\right) \stackrel{\alpha(x)\xrightarrow[x\to\infty]{} \text{cost.}}{=}$$

$$= U\, \mathbb{Q}\, U^{-1}$$

QUANTIZZAZIONE CANONICA

metodo quant. canonico non è straightforward: certe variabili non hanno momenti coniugati e ciò porta a difficoltà.

- Teoria di YM è una teoria vincolata ⇝ DIRAC BRAKETS

- Facciamo un GAUGE FIXING e poi applichiamo la quantiz. canonica

- $A_0^a = 0$ qta è la componente che non ha un momento coniugato non-triviale

Lascia ridondanza per $\alpha^a = \alpha^a(\bar{x})$ (indip. da t)

REGOLE DI COMMUTAZIONE

$$[A_i^a(\bar{x},t), A_j^b(\bar{y},t)] = 0 \qquad [F_{0i}^a(\bar{x},t), F_{0j}^b(\bar{y},t)] = 0$$

$$[A_i^a(\bar{x},t), F_{0j}^b(\bar{y},t)] = \underbrace{i\,\delta^{ab}\,\delta_{ij}}_{\text{def. positiva}}\,\delta^{(3)}(\bar{x}-\bar{y})$$

Mettendo a zero A_0^a, nascondo l'informazione data dalle sue eq. del moto, che quindi devo imporre a mano:

e.o.m. di A_0^a: $(D_i F^{i0})^a = 0$ (GAUSS LAW) $\sim \bar{\nabla}\cdot\bar{E} = 0$

Qta condizione viene imposta sugli stati FISICI (potremmo farlo quantizz. il sistema vincolato)

↳ $(D_i F^{i0})^a\,|phys\rangle = 0 \quad \forall a$

uccide pol. longitudinali (qlle temp. uccise da gauge fixing)

$\updownarrow$ equiv.

$\Gamma[\alpha]\,|phys\rangle = 0 \quad \forall \alpha(x)$ con $\Gamma[\alpha] \equiv \int d^3\bar{x}\,(D_i F^{i0})^a \alpha^a(\bar{x})$

Ricordiamo che a livello quantistico la simm. è generata dalla carica

$$Q(\alpha) = \int j^0(\alpha)\, d^3\bar{x} = \int F^{a\,oi}\, \delta_\alpha A_i\, d^3\bar{x}$$

$$= \int F^{a\,oi} (D_i \alpha)^a d^3\bar{x}$$

$$\leftarrow \partial_i (\underbrace{F^{a\,oi}\alpha^a}_{\text{singoletto}}) = (D_i F^{a\,oi})\alpha^a + \underline{F^{a\,oi} D_i \alpha^a}$$

$$= \int \partial_i (F^{a\,oi}\alpha^a)\, d^3\bar{x} - \int D_i F^{a\,oi} \alpha^a\, d^3\bar{x}$$

$$= \underbrace{\oint_{S^2_\infty} F^{a\,oi}\alpha^a}_{\alpha^a(\infty)Q^a} - \Gamma[\alpha]$$

$\leftarrow$ si annulla su stati fisici

$$\rightarrow \quad \delta|phys\rangle = i\,Q(\alpha)\,|phys\rangle = i\,\alpha^a(\infty)\,Q^a\,|phys\rangle$$

- se $\alpha(\bar{x}) \xrightarrow[\bar{x}\to\infty]{} 0$ ("small" gauge transf.) $\Rightarrow$

  $\Rightarrow$ $|phys\rangle$ è lasciato invariato $\rightsquigarrow$ ridondanza

- se $\alpha(\bar{x}) \to \text{cost} \neq 0 \longrightarrow |phys\rangle$ trasforma sotto G.

$\rightsquigarrow$ Ω_* = vere ridondanze, cioè sono queste le trasf. di gauge vere e proprie.

$G \cong \Omega/\Omega_*$ è GRUPPO DI SIMMETRIA della teoria.