Metodo di eliminazione di Gauss

Questo metodo permette di trasformare una matrice in una matrice a gradini, in modo tale che i sistemi lineari corrispondenti siano equivalenti. Come vedremo permette di fare anche varie altre cose tra cui calcolare l'inversa di una matrice invertibile.

Operazioni elementari sulle righe di una matrice. Data $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ consideriamo i seguenti tre tipi di operazioni (con $i \neq j$).

Tipo I. Scambiare due righe di A.

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ A^{(i)} \\ \vdots \\ A^{(j)} \\ \vdots \end{pmatrix} \overset{I}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} \vdots \\ A^{(j)} \\ \vdots \\ A^{(i)} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Tipo II. Moltiplicare una riga di A per uno scalare $\alpha \neq 0$.

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ A^{(i)} \\ \vdots \end{pmatrix} \overset{II}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} \vdots \\ \alpha A^{(i)} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Tipo III. Sommare ad una riga di A un multiplo di un'altra riga di A.

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ A^{(i)} \\ \vdots \\ A^{(j)} \\ \vdots \end{pmatrix} \overset{III}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} \vdots \\ A^{(i)} \\ \vdots \\ A^{(j)} + \alpha A^{(i)} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Per ciascuna operazione le altre righe non vengono modificate.

Oss. Le operazioni inverse sono operazioni elementari dello stesso tipo. Questo è evidente per le operazioni di tipo I e II. Per le operazioni di tipo III si riottiene la matrice originale sommando $-\alpha A^{(i)}$ alla riga j.

Oss. Si possono anche considerare operazioni elementari sulle colonne di una matrice, definite in modo simile.

Algoritmo di Gauss. Supponiamo che $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ non sia a gradini.

<u>*Passo 1.*</u> Mediante un'operazione di tipo I (scambio di righe) mettiamo come prima riga una che abbia il pivot più a sinistra possibile (potrebbe già essere la prima riga). Supponiamo quindi che tale pivot sia $a_{1p} \neq 0$. Le colonne che precedono la p-esima, se presenti (cioè se $p > 1$), sono nulle.

<u>*Passo 2.*</u> Mediante operazioni di tipo III annulliamo tutti i pivot al di sotto del primo: se $a_{ip} \neq 0$ per $i > 1$, sostituiamo $A^{(i)}$ con

$$A^{(i)} - \frac{a_{ip}}{a_{1p}} A^{(1)}.$$

<u>*Passo 3.*</u> Tralasciamo (senza cancellare) la riga 1 e torniamo al Passo 1, iterando il procedimento sulle righe successive.

Al termine dell'algoritmo la matrice sarà a gradini.

Oss. Non abbiamo usato operazioni di tipo II ma queste possono comunque essere utili per eventuali semplificazioni.

Esempio.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \overset{I}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \overset{III}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \overset{I}{\rightsquigarrow}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{I}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & -2 \end{pmatrix} \overset{II}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$