Metodo di risoluzione di un sistema lineare

Consideriamo un sistema lineare in forma matriciale

$$S : AX = B$$

con

$$A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{K}), \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Risolvere un sistema significa capire se è compatibile, e se lo è trovare *tutte* le soluzioni. Mediante il metodo di Gauss è possibile trasformare un sistema lineare qualunque in uno a gradini *equivalente*. Pertanto un sistema lineare (reale o complesso) compatibile ammette un'unica soluzione, oppure infinite.

Matrice completa. La *matrice completa* del sistema

$$\left(A \,\middle|\, B\right)$$

si ottiene aggiungendo il vettore colonna dei termini noti alla matrice dei coefficienti. Le operazioni elementari sulle righe della matrice completa trasformano il sistema in un sistema *equivalente*. Infatti a livello di sistema le operazioni elementari corrispondono alle seguenti.

Tipo I. Scambiare due equazioni di S.

Tipo II. Moltiplicare un'equazione di S per uno scalare $\alpha \neq 0$.

Tipo III. Sommare membro a membro un'equazione di S con un multiplo scalare un'altra equazione di S.

Dopo un'operazione di tipo I, II o III il nuovo sistema ha le soluzioni di quello di partenza, e viceversa il sistema di partenza si riottiene dal nuovo mediante operazioni dello stesso tipo, risultando dunque equivalenti.

Risoluzione di un sistema lineare. Si applica l'algoritmo di Gauss alla matrice completa del sistema per trasformarla in una matrice a gradini che rappresenta un sistema lineare a gradini equivalente a quello di partenza. Il sistema a gradini si risolve col metodo già studiato.

Esempio.

$$\begin{cases} x + 2y - 4z = 1 \\ 2x - y - z = -1 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right) \overset{III}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & -5 & 7 & -3 \end{array}\right)$$

Il sistema è compatibile, z non ha pivot, c'è un parametro libero.

$$\begin{cases} x + 2y - 4z = 1 \\ \quad -5y + 7z = -3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{6}{5}t - \dfrac{1}{5} \\ y = \dfrac{7}{5}t + \dfrac{3}{5} \\ z = t \end{cases}$$

Le operazioni elementari trasformano un sistema omogeneo in un altro sistema omogeneo, quindi i termini noti se all'inizio sono *tutti* nulli, rimangono nulli. Per questa ragione, nel caso dei sistemi omogenei, non è necessario riportare la colonna dei termini noti.

Esempio. Risolviamo un sistema omogeneo.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{I}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \overset{III}{\rightsquigarrow}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 8 & -1 \end{pmatrix} \overset{III}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 0 \\ \qquad x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ \qquad\quad 10x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{8}{5}t \\ x_2 = -\dfrac{9}{10}t \\ x_3 = -\dfrac{1}{10}t \\ x_4 = t \end{cases}$$

Sistemi con infinite soluzioni

Prop. *Ogni sistema lineare di m equazioni in n incognite che sia compatibile e con $m < n$ (ossia con meno equazioni che incognite), ha necessariamente infinite soluzioni.*

Dim. L'algoritmo di Gauss non fa aumentare il numero di equazioni, mentre le incognite rimangono le stesse. Il sistema a gradini che si ottiene con Gauss sarà quindi compatibile e avrà meno equazioni che incognite. Dunque il numero dei pivot è minore del numero di incognite. Pertanto esiste almeno un'incognita senza coefficiente pivot. Nella soluzione generale ci sarà quindi almeno un parametro libero che assume infiniti valori, ottenendo in corrispondenza infinite soluzioni. $\square$

Dato che i sistemi omogenei (ossia con i termini noti tutti nulli) sono sempre compatibili avendo almeno la soluzione nulla, si ottiene il seguente corollario.

Cor. *Ogni sistema lineare omogeneo con meno equazioni che incognite ha infinite soluzioni.*

Sistemi dipendenti da parametri

Spesso occorre risolvere sistemi che dipendono da uno o più *parametri*. I parametri del sistema non vanno confusi né con le incognite, né con i parametri liberi, coi quali non c'entrano niente, e devono essere indicati con lettere diverse. Cambiando i parametri del sistema, cambia il sistema e quindi le soluzioni. Per contro, cambiando soltanto i parametri liberi (se presenti) si ottengono diverse soluzioni dello stesso sistema.

Esempio. Nel seguente sistema lineare k è un parametro del sistema. Vogliamo trovare tutte le soluzioni del sistema al variare di $k \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} kx + y - 2z = 0 \\ x + 2y - kz = k \\ y + z = k \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -k & k \\ 0 & 1 & 1 & k \end{array}\right) \overset{I}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -k & k \\ 0 & 1 & 1 & k \\ k & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \overset{III}{\rightsquigarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -k & k \\ 0 & 1 & 1 & k \\ 0 & -2k+1 & k^2-2 & -k^2 \end{array}\right) \overset{III}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -k & k \\ 0 & 1 & 1 & k \\ 0 & 0 & k^2+2k-3 & k^2-k \end{array}\right)$$

$k^2 + 2k - 3 = (k+3)(k-1)$ è pivot $\Leftrightarrow k \neq -3, 1$.
Si studiano quindi tre casi separatamente: $k = -3$, $k = 1$, $k \neq -3, 1$.

$\underline{k = -3}$ Sistema incompatibile.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{array}\right)$$

$\underline{k = 1}$ Sistema compatibile con infinite soluzioni, un parametro libero.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ y + z = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases}$$

$\underline{k \neq -3, 1}$ Sistema compatibile con un'unica soluzione.
Nell'ultima riga possiamo semplificare $k-1 \neq 0$, dato che $k^2-k = k(k-1)$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -k & k \\ 0 & 1 & 1 & k \\ 0 & 0 & k+3 & k \end{array}\right) \quad \begin{cases} x + 2y - kz = k \\ y + z = k \\ (k+3)z = k \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\dfrac{k}{k+3} \\ y = \dfrac{k(k+2)}{k+3} \\ z = \dfrac{k}{k+3} \end{cases}$$