CURVE IN $\mathbb{R}^n$

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo.
Una funzione $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ <u>continua</u>
si dice <u>curva</u> in $\mathbb{R}^n$.

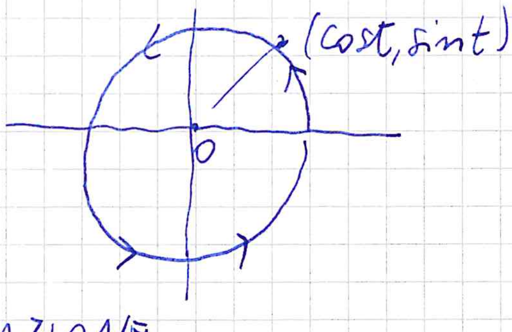
L'immagine di γ, indicata con
$$\gamma^* := \{ \gamma(t) \mid t \in I \} \subseteq \mathbb{R}^n$$
si dice "traiettoria" della curva γ.

Si può pensare a t come "tempo",
$t \mapsto \gamma(t)$ legge oraria di un moto di un punto
γ^* la traiettoria che il punto "disegna"
nello spazio muovendosi.

ESEMPIO

$\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $\qquad \gamma(t) = (\cos t, \sin t)$

$\gamma^* = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \}$ (circonferenza di raggio 1)



OSSERVAZIONE

Curve diverse possono avere la stessa traiettoria.

<u>esempio</u> : $\gamma_1(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, 2\pi]$

$\gamma_2(t) = (\cos 2t, \sin 2t) \quad t \in [0, \pi]$.

SEGMENTI E RETTE in $\mathbb{R}^n$

Dato $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $v \in \mathbb{R}^n$

$\gamma(t) := x_0 + tv \qquad t \in \mathbb{R}$

è la retta passante per x_0 con direzione e verso individuati da v.

Dati due punti $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$,
il segmento che li unisce partendo da x_1 e arrivando a x_2 è

$$\gamma(t) := x_1 + t(x_2 - x_1) \qquad t \in [0, 1]$$

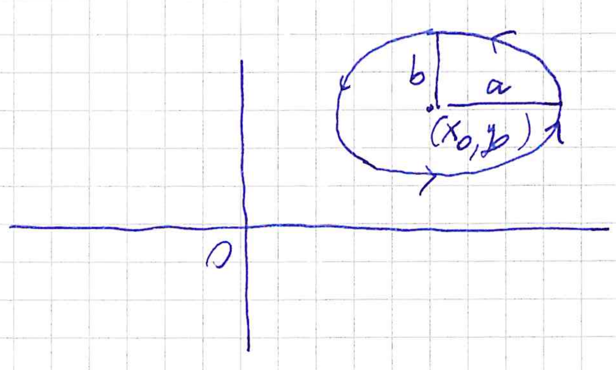
in questo caso si scrive $\gamma^* = [x_1, x_2] \subseteq \mathbb{R}^n$.

CIRCONFERENZE ED ELLISSI NEL PIANO

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + a \cos t \\ y(t) = y_0 + b \sin t \end{cases}$$

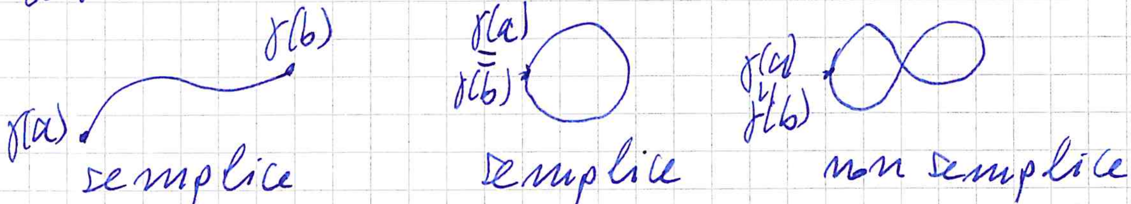
$a, b > 0$.

se $a = b$ ho un cerchio.
se $a \neq b$ ho un'ellisse.



Se $I=[a,b]$ e se $\gamma(a)=\gamma(b)$ la curva si dice chiusa.

La curva si dice semplice se γ è iniettiva in I, tranne eventualmente $\gamma(a)=\gamma(b)$.



CURVE REGOLARI E VELOCITÀ

Sia $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una curva.

Si dice che γ è derivabile in $t_0 \in \mathring{I} \iff$

$$\exists \lim_{t \to t_0} \frac{\gamma(t)-\gamma(t_0)}{t-t_0} = \gamma'(t_0) \in \mathbb{R}^n .$$

Se γ è derivabile in t_0, $\gamma'(t_0)$ si dice "velocità".

ES.

Se $\gamma(t) = x_1 + tv \quad t \in \mathbb{R}$ si ha

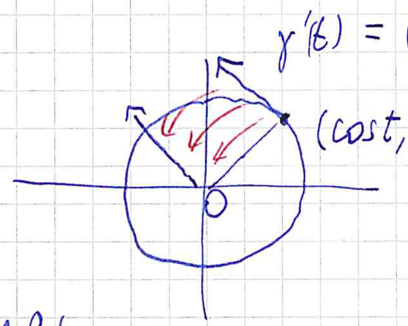
$\gamma'(t_0) = v \quad \forall\, t_0 \in \mathbb{R}$.

Se $\gamma(t) = x_1 + t(x_2 - x_1) \qquad t \in [0,1]$

allora per $t \in]0,1[\qquad \gamma'(t) = (x_2 - x_1)$

Se $\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \qquad t \in [0, 2\pi]$
allora

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t) \qquad t \in]0, 2\pi[.$$

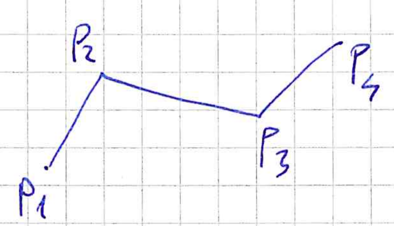


CURVE REGOLARI

Una curva $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ si dice "regolare"
$\Longleftrightarrow \exists\, \gamma'(t) \quad \forall t \in I$ e $\gamma'(t)$ è continua.

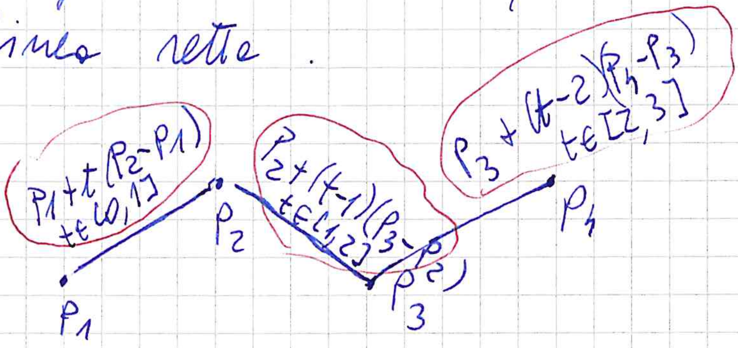
Si dice regolare a tratti $\Longleftrightarrow$
$\exists\, a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$, dove $I = [a,b]$,
t.c. γ è regolare in ogni $]t_{i-1}, t_i[$,
$i = 1, \dots, k$.

Esempio: le spezzate



LUNGHEZZA DI UNA CURVA

Siano $P_1, P_2, \dots, P_4 \in \mathbb{R}^n$
e sia γ la spezzata ottenuta
congiungendo P_1 a P_2, P_2 a P_3 ecc.
in linea retta.

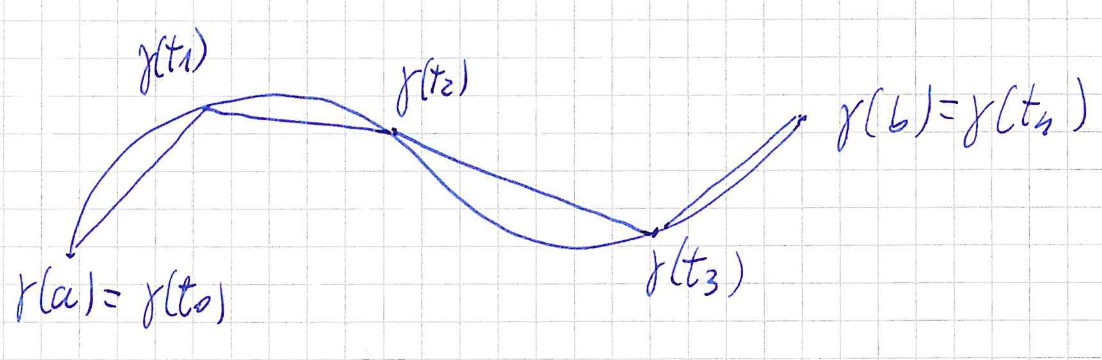


$$\gamma = \begin{cases} P_1 + t(P_2 - P_1) & t \in [0,1] \\ P_2 + (t-1)(P_3 - P_2) & t \in [1,2] \\ P_3 + (t-2)(P_4 - P_3) & t \in [2,3] \end{cases}$$

È naturale porre

$$\ell(\gamma) = \| P_2 - P_1 \| + \| P_3 - P_2 \| + \| P_4 - P_3 \|$$

Se $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ è una curva
l'idea è di approssimare γ con spezzate



L' idea è che se $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b$

allora

$$\ell(\gamma) \geq \sum_{j=1}^{k} \| \gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1}) \|$$

e che infittendo la partizione di $[a,b]$ ci si avvicina sempre più a $\ell(\gamma)$.

L' idea quindi è porre

$$\ell(\gamma) := \sup \left\{ \sum_{j=1}^{k} \| \gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1}) \| \;\middle|\; \{t_0, \ldots, t_k\} \text{ partizione di } [a,b] \right\}.$$

TEOREMA

Se γ è regolare, allora $\ell(\gamma) < +\infty$ e

$$\boxed{\ell(\gamma) = \int_a^b \| \gamma'(t) \| \, dt .}$$

OSS. "$\| \gamma'(t) \| dt$" si può interpretare come lunghezza di uno spostamento durante un intervallo di tempo "infinitesimale" dt.

RIPARAMETRIZZAZIONI

Sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una curva regolare (o regolare a tratti).

Sia $\varphi : [a',b'] \to [a,b]$ una funzione di classe C^1 strettamente crescente o strettamente decrescente, con $\varphi'(t) \neq 0 \ \forall t$.

Definiamo $\tilde{\gamma}(t) := \gamma(\varphi(t)) \quad t \in [a',b']$

allora $\tilde{\gamma}$ si dice "riparametrizzazione di γ."

PROP

$\ell(\gamma) = \ell(\tilde{\gamma})$.

Dim.

$$\ell(\tilde{\gamma}) = \int_{a'}^{b'} \|\tilde{\gamma}'(t)\| \, dt = \int_{a'}^{b'} \|\gamma'(\varphi(t))\varphi'(t)\| \, dt$$

$$= \int_{a'}^{b'} \|\gamma'(\varphi(t))\| \, |\varphi'(t)| \, dt \underset{\text{caso } \varphi' > 0}{=} \int_a^b \|\gamma'(s)\| \, ds$$

se $\varphi' < 0$ la dim. è simile. $\blacksquare$

PARAMETRIZZAZIONE CON LA LUNGHEZZA D'ARCO

Sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una curva.

Supponiamo che $\gamma'(t) \neq 0 \ \forall t$.

Definiamo $\sigma(t) := \int_a^t \|\gamma'(p)\| dp$

allora $\sigma(a) = 0 < \sigma(b) = \ell(\gamma)$.

Inoltre $\sigma'(t) = \|\gamma'(t)\| > 0 \quad \forall t$.

Posso usare $\sigma(t)$ per riparametrizzare la curva

Sia $\sigma^{-1} : [0, \ell(\gamma)] \longrightarrow [a, b]$
l'inversa di σ.

definiamo $\underbrace{\tilde{\gamma}(s) := \gamma(\underbrace{\sigma^{-1}(s)}_{\text{quanto tempo ci ho messo per percorrere una lunghezza } s \text{ lungo la curva } \gamma})}_{\text{in che punto dello spazio mi trovo dopo aver percorso una lunghezza } s \text{ lungo la curva } \gamma.}$

Osserviamo che

$$\tilde{\gamma}'(s) = \gamma'(\sigma^{-1}(s))\,(\sigma^{-1})'(s)$$

$$= \gamma'(\sigma^{-1}(s)) \frac{1}{\sigma'(\sigma^{-1}(s))}$$

$$= \gamma'(\sigma^{-1}(s)) \frac{1}{\|\gamma'(\sigma^{-1}(s))\|}$$

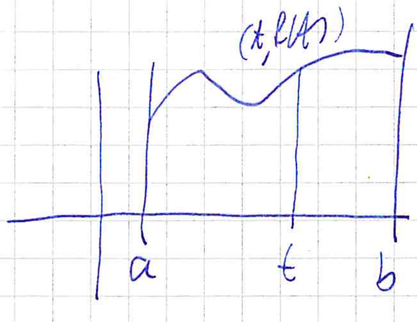
$$\Longrightarrow \|\tilde{\gamma}'(s)\| = 1$$

Quindi se riparametrizzo γ con la lunghezza d'arco, ottengo una riparametrizzazione $\tilde{\gamma}$ t.c. la velocità $\tilde{\gamma}'(t_0)$ è un versore tangente alla curva.

GRAFICI DI FUNZIONI $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ come curve di $\mathbb{R}^2$.

Sia $f: [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Sia $\gamma(t) := (t, f(t)) \quad t \in [a,b]$.



Si ha $\gamma'(t) = (1, f'(t))$

Quindi

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}\, dt$$

ESEMPIO

Spirale $\gamma(t) = (e^{-t}\cos t, e^{-t}\sin t) \quad t \in [0, T]$

$$\gamma'(t) = (-e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t, -e^{-t}\sin t + e^{-t}\cos t)$$

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{2e^{-2t}\cos^2 t + 2e^{-2t}\sin^2 t}$$

$$= \sqrt{2}\, e^{-t} \qquad \Rightarrow \ell(\gamma) = \int_0^T \sqrt{2}\, e^{-t}\, dt = \sqrt{2}\left[-e^{-t}\right]_0^T$$

$$= \sqrt{2}(1 - e^{-T})$$