Esercizi di Geometria
2023/2024
quarto foglio

October 20, 2023

1. Si determini la matrice 2×3 a coefficienti reali data dal seguente prodotto righe per colonne:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Si considerino le matrici:
$$A := \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
Si calcolino $A \cdot B$ e $B \cdot A$ e si confrontino i risultati. Cosa notate?

3. Sia $A \in M_{2,3}(\mathbb{K})$ la matrice
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$
Si determini la matrice trasposta:
$${}^{t}A.$$
Si calcoli, inoltre:
$$A \cdot {}^{t}A \in M_2(\mathbb{K}), \quad {}^{t}A \cdot A \in M_3(\mathbb{K}).$$
Cosa notate?

4. Sia $A \in M_3(\mathbb{K})$ la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$
Si determini ${}^{t}A$ e si calcoli
$$A + {}^{t}A.$$
Cosa notate?

5. Si calcoli
$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^3.$$

6. Una matrice $N \in M_n(\mathbb{K})$ si dice nilpotente se esiste un numero naturale $k \in \mathbb{N}$ tale che

$$N^k = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Si dimostri che per ogni $a, b, c \in \mathbb{K}$ le matrici

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sono nilpotenti.

7. Sia $D \in M_3(\mathbb{K})$ una matrice quadrata *diagonale*, cioè del tipo

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Si dimostri che D è invertibile se e solo se

$$a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \neq 0,$$

e in tal caso si ha

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_{33}} \end{pmatrix}.$$

8. Si verifichi che se $A \in M_n(\mathbb{K})$ è una matrice quadrata invertibile, allora per A *vale la legge di cancellazione*:

$$A \cdot B = A \cdot C \Rightarrow B = C,$$

con $B, C \in M_n(\mathbb{K})$.

9. Si verifichi che se A è una matrice invertibile, allora anche la trasposta ${}^tA$ è invertibile e vale:

$$({}^tA)^{-1} =^t (A^{-1}).$$

Una matrice quadrata $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ è detta simmetrica se $A = {}^tA$, e A è detta antisimmetrica se $A = -{}^tA$; in particolare gli elementi della diagonale principale di una matrice antisimmetrica sono tutti nulli.

(i) Si dimostri che le matrici simmetriche formano un sottospazio vettoriale, denotato $Sym(n \times n, \mathbb{R})$, di $M(n \times n, \mathbb{R})$. Si trovi una base di tale sottospazio;

(ii) Stessa domanda per l'insieme delle matrici antisimmetriche $Alt(n \times n, \mathbb{R})$.