Sistemi lineari

Un sistema lineare si può esprimere nella forma

$$\underbrace{A \cdot X}_{m\times n \quad n\times 1} = \underbrace{b}_{m\times 1}$$

numero di...
$m = \#$ equazioni
$n = \#$ variabili

Esempi: consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ x_1 + 2x_2 = 5 \end{cases}$$

2 equazioni
2 incognite

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

il sistema è non omogeneo: almeno un termine noto è non nullo
il sistema è incompatibile: infatti esso non ha soluzioni; infatti se $s = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$ fosse una soluzione allora varrebbe che

$$\begin{cases} s_1 + 2s_2 = 3 \\ s_1 + 2s_2 = 5 \end{cases} \Longrightarrow 3 = 5 \text{ assurdo!}$$

Esempio: consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$$

non è chiaro a priori se il sistema sia compatibile o meno

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ x_1 = x_2 + 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 + 1 + 2x_2 = 3 \\ x_1 = x_2 + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_2 = 2 \\ x_1 = x_2 + 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = 2/3 \\ x_1 = 5/3 \end{cases}$$

il sistema ha dunque un'unica soluzione $\begin{pmatrix} 5/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$: esso è quindi compatibile (e non-omogeneo)
(il motivo per il quale siamo certi che vi sia un'unica soluzione è che per ottenere il sistema finale abbiamo trasformato il sistema iniziale tramite operazioni che non cambiano l'insieme delle soluzioni)

Def: due sistemi lineari si dicono equivalenti se ammettono le medesime soluzioni (ovvero se gli insiemi delle loro soluzioni sono uguali)

Esempio: consideriamo il sistema:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 = 6 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = 3 - 2x_2 \\ 2(3-2x_2) + 4x_2 = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 3 - 2x_2 \\ 6 - \cancel{4x_2} + \cancel{4x_2} = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 3 - 2x_2 \\ \boxed{6 = 6} \end{cases} \longleftarrow \text{sempre vero!}$$

Il sistema iniziale è pertanto equivalente ad un'unica equazione:
$$x_1 = 3 - 2x_2$$

le soluzioni di questa equazione si possono esprimere così: se a x_2 assegno il valore $t \in \mathbb{R}$, allora a x_1 devo assegnare il valore $3 - 2t$, ovvero le soluzioni sono della forma

$$\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 3 - 2t \\ t \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}} ; \ t \in \mathbb{R} \right\}$$

$\longleftarrow$ vediamo che le soluzioni sono infinite!

$\longleftarrow$ graficamente queste soluzioni corrisponderanno ai punti di una retta passante per $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

Teorema: (teorema di Cramer)
consideriamo un sistema lineare con n equazioni ed n incognite:
$$AX = b$$
ovvero la matrice A è quadrata ($A \in M_n(K)$); supponiamo inoltre che A sia invertibile; allora esiste un'unica soluzione s del sistema ed essa è data da $s = A^{-1} \cdot b$

Oss: questo teorema non ci dice soltanto che una soluzione esiste, ma ci fornisce anche un modo per calcolarla.

Dim: per dimostrare il teorema dimostriamo due cose:
1. che $A^{-1} \cdot b$ è soluzione del sistema
2. che $A^{-1} \cdot b$ è l'unica soluzione del sistema

1. $A^{-1} \cdot b$ è soluzione del sistema se e solo se, se sostituiamo X con $A^{-1} \cdot b$ otteniamo un'uguaglianza vera nel sistema (notiamo che la sostituzione ha senso dato che X è una matrice $n \times 1$ e $A^{-1} \cdot b$ è una matrice $n \times 1$)

$$A(A^{-1} \cdot b) \overset{?}{=} b$$

$$\underbrace{\underbrace{A(A^{-1} \cdot b)}_{(A \cdot A^{-1}) \cdot b}}_{} \qquad \underbrace{\underbrace{(A \cdot A^{-1})}_{\mathbb{1}_n} \cdot b}_{b}$$

Abbiamo verificato che l'uguaglianza è vera, dunque $A^{-1} \cdot b$ è soluzione del sistema, il quale quindi è compatibile

2. per mostrare che $A^{-1} \cdot b$ è l'unica soluzione, supponiamo che ve ne sia un'altra, ovvero supponiamo che un certo $s' \in M_{n,1}(K)$ sia soluzione del sistema e mostriamo che deve essere $s' = A^{-1} \cdot b$.
(ovvero mostriamo che dal fatto che s' è soluzione del sistema discende che s' deve essere uguale ad $A^{-1} \cdot b$); abbiamo quindi supposto che
$$A \cdot s' = b$$
ora moltiplico entrambi i membri di questa uguaglianza a sinistra per A^{-1}:
$$\underbrace{A^{-1} \cdot (A \cdot s')}_{\underbrace{\underbrace{(A^{-1} \cdot A)}_{\mathbb{1}_n} \cdot s'}_{s'}} = A^{-1} \cdot b$$

Abbiamo quindi mostrato che
$$s' = A^{-1} \cdot b$$

Notazione: d'ora in poi andremo ad identificare i seguenti due spazi vettoriali:

$$M_{m,1}(K) \quad e \quad K^m$$

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

in questo senso diremo ad esempio che un elemento $s \in K^n$ è soluzione di un sistema lineare $AX = b$

Teorema: (teorema di struttura per sistemi lineari omogenei)
consideriamo un sistema lineare omogeneo di m equazioni in n incognite
$$A \cdot X = 0$$
$\uparrow$ matrice $m \times 1$ con tutte le entrate nulle

siano $s, s' \in K^n$ due soluzioni del sistema e sia $\lambda \in K$; allora
1. $s + s'$ è soluzione del sistema lineare
2. $\lambda \cdot s$ è soluzione del sistema lineare

pertanto, ricordando che il vettore nullo $0 \in K^n$ è sempre soluzione del sistema omogeneo otteniamo che l'insieme delle soluzioni di $AX = 0$, ovvero l'insieme
$$\{ r \in K^n : A \cdot r = 0 \}$$
è un sottospazio vettoriale di K^n.

Oss: vale che, se $A \in M_{m,n}(K)$ e $s \in K^n$, e $\lambda \in K$, allora
$$A \cdot (\lambda \cdot s) = \lambda \cdot (A \cdot s)$$

Dim: 1. dato che s ed s' sono soluzioni, vale che
$$A \cdot s = 0 \quad e \quad A \cdot s' = 0$$
per mostrare che $s + s'$ è soluzione dobbiamo dimostrare che
$$A(s + s') = 0$$
ora
$$A \cdot (s + s') \underset{\uparrow}{=} A \cdot s + A \cdot s' = 0 + 0 = 0$$
il prodotto righe per colonne soddisfa la proprietà distributiva

quindi $s + s'$ è soluzione

2. dato che s è soluzione vale che
$$A \cdot s = 0$$
per mostrare che $\lambda \cdot s$ è soluzione dobbiamo mostrare che
$$A \cdot (\lambda \cdot s) = 0$$
ora
$$A(\lambda \cdot s) \underset{\uparrow}{=} \lambda \cdot (A \cdot s) = \lambda \cdot 0 = 0$$
osservazione precedente

quindi $\lambda \cdot s$ è soluzione

Oss: sia $A \in M_n(K)$, ovvero una matrice quadrata e supponiamo che A sia invertibile; consideriamo il sistema lineare omogeneo
$$A \cdot X = 0$$
allora per il teorema di Cramer $A^{-1} \cdot 0$ è l'unica soluzione del sistema e dato che $A^{-1} \cdot 0 = 0$ abbiamo che 0 è l'unica soluzione di un tale sistema lineare omogeneo.

Teorema: (teorema di struttura per sistemi lineari qualsiasi)
consideriamo un sistema lineare
$$A \cdot X = b \qquad \text{con } A \in M_{m,n}(K) \text{ e } b \in K^m$$
e sia $\tilde{s}$ una sua soluzione; allora un elemento $s \in K^n$ è soluzione di $AX = b$ se e solo se possiamo scrivere
$$s = \tilde{s} + s_0$$
dove s_0 è una soluzione del sistema lineare omogeneo $AX = 0$;
in altre parole, l'insieme delle soluzioni di $AX = b$ è l'insieme
$$\{ s \in K^n : s = \tilde{s} + s_0 \text{ per un qualche } s_0 \text{ che sia soluzione di } AX = 0 \}$$
(il sistema $AX = 0$ si dice il sistema lineare omogeneo associato al sistema $AX = b$).