ESERCIZI SU MATRICI E SOTTOSPAZI
ALGEBRA LINEARE ED ELEMENTI DI GEOMETRIA
MATEMATICA PER L'ECONOMIA E LA STATISTICA 2
A.A. 2023/24

Esercizio 1

Date le seguenti coppie di matrici A e B, **verifica** che B è l'inversa di A.

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & -3 \\ -5 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 14 & -6 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & 8 & 2 \\ 2 & -5 & -2 \\ 2 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -6 & -2 \\ 2 & -13 & -4 \\ -4 & 22 & 7 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ -8 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2

Dimostra che la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

non è invertibile. **Dimostra** poi che nessuna matrice del tipo

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 2\,a & 2\,b \end{pmatrix}$$

con $a, b \in \mathbb{R}$ può essere invertibile.

Esercizio 3

Siano $A, B, C \in M_n(K)$, dove K un campo, e supponiamo che A sia invertibile. **Dimostra** che anche ${}^tA$ è invertibile e che $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$. **Dimostra** inoltre che vale la *legge di cancellazione*, ovvero che

$$\text{se } AB = AC \quad \text{allora } B = C\,.$$

Esercizio 4

Considera una matrice diagonale $D \in M_n(K)$, dove K è un campo:

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_{nn} \end{pmatrix}$$

Dimostra che D è invertibile se e solo se $d_{11} \cdot d_{22} \cdots d_{nn} \neq 0$ e che in tal caso vale

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} d_{11}^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22}^{-1} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_{nn}^{-1} \end{pmatrix}$$

Esercizio 5

Usando i risultato dell'Esercizio 1, **dimostra** che ciascuno dei seguenti sistemi lineari ammette un'unica soluzione e **calcolala**:

$$\begin{cases} -6x + 2y + z &= 2 \\ -3x + 2y &= -1 \\ 4x - y - z &= 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x + 8y + 2z &= 1 \\ 2x - 5y - 2z &= 0 \\ 2x - 5y - 2z &= 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2y - 6z &= 3 \\ 2x + 2y + 4z &= 2 \\ -4y - 10z &= -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x + 2y - 8z &= -2 \\ -2x - y + 2z &= 1 \\ -2x - z &= 2 \end{cases}$$