CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA APPLICATA

PRECORSO DI MATEMATICA

ESERCIZI DI

TRIGONOMETRIA: FORMULE TRIGONOMETRICHE

Esercizio 1: Fissata in un piano cartesiano ortogonale xOy una circonferenza goniometrica, sapendo che $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}\,, \pi\right]$ e $\sin\alpha = \frac{3}{4}$, calcolare

$$\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right).$$

Svolgimento: Utilizzando la formula di addizione del coseno si ha

$$\begin{aligned}\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) &= \cos\alpha\cos\frac{\pi}{6} - \sin\alpha\sin\frac{\pi}{6} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha\,.\end{aligned}$$

Quindi, per calcolare il valore dato, bisogna determinare $\cos\alpha$. Dalla prima relazione fondamentale della trigonometria si ha

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1\,,$$

da cui segue che

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-\frac{9}{16}} = -\frac{\sqrt{7}}{4}\,,$$

essendo $\cos\alpha < 0$, poiché $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}\,, \pi\right]$.

Allora si ottiene

$$\begin{aligned}\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) &= \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right) - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} = -\frac{\sqrt{21}+3}{8}\,.\end{aligned}$$

Esercizio 2: Fissata in un piano cartesiano ortogonale xOy una circonferenza goniometrica, sapendo che $\alpha \in \left[\pi\,, \frac{3}{2}\pi\right]$ e $\cos\alpha = -\frac{5}{7}$, calcolare

$$\sin 2\alpha\,.$$

Svolgimento: Per poter utilizzare la formula di duplicazione del seno

$$\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha\,,$$

bisogna calcolare $\sin\alpha$.
Utilizzando la prima relazione fondamentale della trigonometria e il fatto che $\alpha \in \left[\pi\,, \frac{3}{2}\,\pi\right]$ si ha

$$\sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} = -\sqrt{1-\frac{25}{49}} = -\frac{2\sqrt{6}}{7}\,.$$

Allora risulta

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\left(-\frac{2\sqrt{6}}{7}\right)\left(-\frac{5}{7}\right) = \frac{20\sqrt{6}}{49}\,.$$

Esercizio 3: Fissata in un piano cartesiano ortogonale xOy una circonferenza goniometrica, sapendo che $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}\,, \pi\right]$ e $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{3}{4}$, calcolare

$$\cos\alpha\,.$$

Svolgimento: Si ha

$$\cos\alpha = \cos\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right) = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}\,,$$

grazie alla formula di duplicazione del coseno. Utilizzando la prima relazione fondamentale della trigonometria si ottiene anche

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\,.$$

Quindi risulta

$$\cos\alpha = 1 - 2\cdot\frac{9}{16} = -\frac{1}{8}\,.$$

Esercizio 4: Fissata in un piano cartesiano ortogonale xOy una circonferenza goniometrica, sapendo che $\alpha \in \left[0\,, \frac{\pi}{2}\right]$ e $\cos\alpha = \frac{1}{5}$, calcolare

$$\cos\frac{\alpha}{2}\,.$$

Svolgimento: Poiché $\alpha \in \left[0\,, \frac{\pi}{2}\right]$, allora $\frac{\alpha}{2} \in \left[0\,, \frac{\pi}{4}\right]$ e quindi

$$\cos\frac{\alpha}{2} \geq 0\,.$$

Utilizzando la formula di bisezione per il coseno si ha

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{5}\right)} = \sqrt{\frac{3}{5}}\,.$$

Esercizio 5: Fissata in un piano cartesiano ortogonale xOy una circonferenza goniometrica, sapendo che $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi\right]$ e $\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$, calcolare

$$\sin \alpha .$$

Svolgimento: Si ha

$$\sin \alpha = \sin\left(\frac{2\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}},$$

grazie alla formule di bisezione per il seno e tenendo conto del fatto che $\sin \alpha \geq 0$, essendo $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi\right]$.

Dalla prima relazione fondamentale della trigonometria segue

$$\cos 2\alpha = -\sqrt{1-\sin^2 2\alpha} = \sqrt{1-\frac{16}{25}} = -\frac{3}{5},$$

essendo $\cos 2\alpha \leq 0$.
Allora

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{5}\right)} = \frac{2}{5}\sqrt{5}.$$

Esercizio 6: Calcolare il valore della seguente espressione (α assume i valori per i quali sono definite tutte le funzioni che compaiono nell'espressione)

$$\cos \alpha \left(1+\sin 2\alpha - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right) - \sqrt{2}\left(\cos 2\alpha + \sin^2 \alpha\right)\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right).$$

Svolgimento: Dalle formule di duplicazione si ha

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \qquad \text{e} \qquad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,$$

mentre dalla formula di bisezione

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}},$$

segue che

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}.$$

Infine

$$\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\alpha\cos\frac{\pi}{4} - \cos\alpha\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha - \cos\alpha).$$

Sostituendo tali relazioni nell'espressione data si ottiene

$$\cos\alpha\left(1+\sin 2\alpha-2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)-\sqrt{2}\left(\cos 2\alpha+\sin^2\alpha\right)\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\cos\alpha\left(1+2\sin\alpha\cos\alpha-2\cdot\frac{1-\cos\alpha}{2}\right)-\sqrt{2}\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha+\sin^2\alpha\right)\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sin\alpha-\cos\alpha\right)$$

$$=\cos\alpha\left(1+2\sin\alpha\cos\alpha-1+\cos\alpha\right)-\cos^2\alpha\left(\sin\alpha-\cos\alpha\right)$$

$$=\cos^2\alpha\left(2\sin\alpha+1\right)-\cos^2\alpha\left(\sin\alpha-\cos\alpha\right)$$

$$=\cos^2\alpha\left(2\sin\alpha+1-\sin\alpha+\cos\alpha\right)$$

$$=\cos^2\alpha\left(\sin\alpha+\cos\alpha+1\right).$$

Esercizio 7: Verificare se vale la seguente identità (α assume i valori per i quali sono definite tutte le funzioni che compaiono nell'espressione)

$$\frac{(1+\sin\alpha-\cos\alpha)\,(1-\sin\alpha+\cos\alpha)}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

Svolgimento: Consideriamo il primo membro dell'espressione data. Si ha

$$\begin{aligned}(1+\sin\alpha-\cos\alpha)\,(1-\sin\alpha+\cos\alpha) &= [1+(\sin\alpha-\cos\alpha)]\,[1-(\sin\alpha-\cos\alpha)]\\ &= 1-(\sin\alpha-\cos\alpha)^2\\ &= 1-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha\\ &= 2\sin\alpha\cos\alpha=\sin 2\alpha\,,\end{aligned}$$

grazie alle formule di duplicazione.
Inoltre, dalla formula di bisezione del coseno

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}\,,$$

segue che

$$2\cos^2\frac{\alpha}{2}=1+\cos\alpha\,.$$

Allora il primo membro dell'espressione data si può scrivere come

$$\frac{(1+\sin\alpha-\cos\alpha)\,(1-\sin\alpha+\cos\alpha)}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos\alpha}\,,$$

quindi l'identità data vale.

Esercizi: Fissata in un piano cartesiano ortogonale xOy una circonferenza goniometrica

1. scrivere in funzione di $\sin\alpha$ e $\cos\alpha$ le seguenti espressioni

   a. $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$

   b. $\tan\left(\frac{2}{3}\,\pi-\alpha\right)$

   c. $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$

   d. $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

   e. $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)$

   f. $\cos\left(\frac{5}{6}\,\pi-\alpha\right)$

   g. $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$

   h. $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$

   i. $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$

   j. $\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$;

2. sapendo che $\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ e $\sin\alpha=\frac{12}{13}$, calcolare i valori delle seguenti espressioni

   a. $\sin\left(\frac{5}{6}\,\pi+\alpha\right)$

   b. $\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$

   c. $\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$

   d. $\cot\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$;

3. sapendo che $\alpha\in\left[\pi\,,\frac{3}{2}\,\pi\right]$ e $\cos\alpha=-\frac{24}{25}$, calcolare i valori delle seguenti espressioni

   a. $\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$

   b. $\sin\left(\frac{5}{4}\,\pi+\alpha\right)$

   c. $\tan\left(\frac{2}{3}\,\pi-\alpha\right)$

   d. $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$;

4. sapendo che $\alpha\in\left[90^\circ,180^\circ\right]$ e $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$, calcolare i valori delle seguenti espressioni

   a. $\tan\left(150^\circ+\alpha\right)$

   b. $\sin\left(45^\circ+\alpha\right)$

   c. $\cos\left(60^\circ-\alpha\right)$

d. $\cos(135° + \alpha)$

e. $\sin(120° - \alpha)$

f. $\tan(\alpha - 30°)$;

5. sapendo che $\alpha \in \left[\frac{3}{2}\pi\,,2\pi\right]$ e $\cos\alpha = \frac{3}{7}$, calcolare i valori delle seguenti espressioni

   a. $\cot\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)$

   b. $\cos\left(\frac{7}{6}\pi - \alpha\right)$

   c. $\sin\left(\alpha - \frac{2}{3}\pi\right)$

   d. $\cos\left(\frac{3}{4}\pi - \alpha\right)$

   e. $\tan\left(\frac{5}{6}\pi + \alpha\right)$

   f. $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$;

6. sapendo che $\alpha \in \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right]$ e $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, calcolare i valori delle seguenti espressioni

   a. $\sin 2\alpha$

   b. $\cos 2\alpha$

   c. $\tan 2\alpha$;

7. sapendo che $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}\,,\pi\right]$ e $\cos\alpha = -\frac{8}{17}$, calcolare i valori delle seguenti espressioni

   a. $\sin 2\alpha$

   b. $\cos 2\alpha$

   c. $\tan 2\alpha$;

8. sapendo che $\alpha \in \left[2\pi\,,3\pi\right]$ e $\sin\frac{\alpha}{2} = -\frac{2\sqrt{3}}{5}$, calcolare i valori delle seguenti espressioni

   a. $\sin\alpha$

   b. $\cos\alpha$

   c. $\tan\alpha$;

9. sapendo che $\alpha \in \left[0\,,\frac{\pi}{4}\right]$ e $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{24}{25}$, calcolare i valori delle seguenti espressioni

   a. $\sin\alpha$

   b. $\cos\alpha$

c. $\tan\alpha$;

10. sapendo che $\alpha \in \left[0\,,\,\frac{\pi}{2}\right]$ e $\sin\alpha = \frac{5}{13}$, calcolare i valori delle seguenti espressioni

    a. $\sin 2\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$

    b. $\sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$

    c. $\cos 2\left(2\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$;

11. sapendo che $\alpha\,,\beta \in \left[0\,,\,\frac{\pi}{2}\right]$ e $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ e $\cos\beta = \frac{7}{25}$, calcolare i valori delle seguenti espressioni

    a. $\sin\left(2\alpha + \beta\right)$

    b. $\cos\left(\alpha - 2\beta\right)$

    c. $\cos\left(2\alpha - \beta\right)$;

12. sapendo che $\alpha \in \left[\pi\,,\,\frac{3}{2}\,\pi\right]$ e $\tan\alpha = \frac{1}{2}$, calcolare i valori delle seguenti espressioni

    a. $\sin 2\alpha$

    b. $\cos 2\alpha$

    c. $\sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$

    d. $\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{3}\right)$

    e. $\tan 2\alpha$;

13. sapendo che $\alpha \in \left[0\,,\,\frac{\pi}{2}\right]$ e $\cos\alpha = \frac{24}{25}$, calcolare i valori delle seguenti espressioni

    a. $\sin\frac{\alpha}{2}$

    b. $\cos\frac{\alpha}{2}$

    c. $\tan\frac{\alpha}{2}$;

14. sapendo che $\alpha \in \left[\pi\,,\,\frac{3}{2}\,\pi\right]$ e $\cos\alpha = -\frac{7}{24}$, calcolare i valori delle seguenti espressioni

    a. $\sin\frac{\alpha}{2}$

    b. $\cos\frac{\alpha}{2}$

    c. $\tan\frac{\alpha}{2}$;

15. sapendo che $\alpha \in \left[\frac{3}{2}\,\pi\,,\,2\pi\right]$ e $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{6}}{3}$, calcolare i valori delle seguenti espressioni

    a. $\sin\frac{\alpha}{2}$

b. $\cos\dfrac{\alpha}{2}$

c. $\tan\dfrac{\alpha}{2}$;

16. sapendo che $\alpha \in \left[\dfrac{3}{4}\pi\,,\pi\right]$ e $\cos 2\alpha = \dfrac{2}{3}$, calcolare i valori delle seguenti espressioni

a. $\sin\alpha$

b. $\cos\alpha$

c. $\tan\alpha$;

17. sapendo che $\alpha \in \left[\dfrac{\pi}{4}\,,\dfrac{\pi}{2}\right]$ e $\sin 2\alpha = \dfrac{12}{13}$, calcolare i valori delle seguenti espressioni

a. $\sin\alpha$

b. $\cos\alpha$

c. $\tan\alpha$;

18. sapendo che $\alpha \in \left[\dfrac{\pi}{2}\,,\pi\right]$ e $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$, calcolare i valori delle seguenti espressioni

a. $\sin\left(\dfrac{1}{2}\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$

b. $\cos\left(\dfrac{1}{2}\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$

c. $\sin\left(\dfrac{1}{2}\left(\alpha-\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$

d. $\cos\left(\dfrac{1}{2}\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$.

Esercizi: Calcolare il valore delle seguenti espressioni (α e β assumono i valori per i quali sono definite tutte le funzioni che compaiono nell'espressione)

1. $\sin(\alpha+30^\circ)\cos\beta - \cos\alpha\cos(\beta+60^\circ) - \cos 30^\circ\sin(\alpha+\beta)$

2. $\dfrac{2\sin(45^\circ-\alpha)}{\cos(\alpha+45^\circ)+\cos(\alpha-45^\circ)}$

3. $\dfrac{\sin 2\alpha}{4\sin\alpha} - \cos\alpha$

4. $\cos\left(\dfrac{2}{3}\pi-\alpha\right)+\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-\alpha\right)$

5. $\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\cdot\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$

6. $\dfrac{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)-2\sin\alpha}{\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)-2\cos\alpha}$

7. $\dfrac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}$

8. $\sin(\alpha-\beta)\cos\dfrac{5}{6}\pi+\sin\left(\beta-\dfrac{5}{6}\pi\right)\cos\alpha+\sin\left(\dfrac{5}{6}\pi-\alpha\right)\cos\beta$

9. $2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}\cdot\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$

10. $\dfrac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}-\dfrac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}$

11. $\cos^2\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)+\cos^2\left(\alpha+\dfrac{5}{6}\pi\right)$

12. $\dfrac{\sqrt{2}\cos(135°+\alpha)}{\cos(\alpha+120°)+\cos(\alpha-120°)}$

13. $\dfrac{1}{2}\sin 2\alpha+2\sin\alpha\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$

14. $\dfrac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}$

15. $\dfrac{4\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}{3\sin^2(\alpha+\pi)}-\dfrac{1}{\tan^2(\pi-\alpha)}$

16. $\dfrac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$

17. $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)-\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-\alpha\right)$

18. $\dfrac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}\cdot\tan\alpha$

19. $\cos^2\alpha+\cos^2\left(\dfrac{2}{3}\pi+\alpha\right)+\cos^2\left(\dfrac{2}{3}\pi-\alpha\right)$

20. $\dfrac{2\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha\sin\alpha}-\dfrac{\cos\alpha}{2\sin^2\alpha-1}$

21. $2\sin\dfrac{3\alpha}{2}\cdot\sin\dfrac{\alpha}{2}-\cos\alpha+\cos 2\alpha$

22. $\dfrac{\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)}-\dfrac{\tan\alpha-\tan\frac{\pi}{6}}{\tan\alpha+\tan\frac{\pi}{6}}$

23. $\dfrac{1+\sin 2\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}-\sin\alpha$

24. $2\sin\alpha\sin\beta-\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)$

25. $\cos(\alpha+2\beta)+2\sin^2\left(\dfrac{\alpha+2\beta}{2}\right)$

26. $\dfrac{4\sin(\alpha+60^\circ)\sin(240^\circ-\alpha)}{\tan^2\alpha-3}$

27. $\left(\sin\dfrac{\alpha}{2}+\cos\dfrac{\alpha}{2}\right)^2-\sin\alpha$

28. $\dfrac{\sin 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}$

29. $(\sin 2\alpha+\cos 2\alpha)^2-2(\sin 4\alpha+1)$

30. $\dfrac{\cos 2\alpha\cdot\sec\alpha\cdot\csc\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}-\dfrac{1}{\sin\alpha}+\dfrac{1}{\cos\alpha}$.

Esercizi: Scrivere le seguenti espressioni in funzione di $\tan\dfrac{\alpha}{2}$ (α assume i valori per i quali sono definite tutte le funzioni che compaiono nell'espressione)

1. $\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$

2. $\left(\dfrac{\cos\alpha}{1-\cos\alpha}-\dfrac{1+\sin\alpha}{\sin\alpha}\right)\cdot\sin\alpha$

3. $\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$

4. $\dfrac{3+\cos\alpha-3\sin\alpha}{1+3\cos\alpha-\sin\alpha}$

5. $\dfrac{\cos^2\alpha-1}{\sin^2\alpha}$

6. $\dfrac{(1-\cos\alpha)(1-\sin\alpha)}{2(1+\cos\alpha)^2}$

7. $\dfrac{1+\sin\alpha+\cos\alpha}{1+\sin\alpha-\cos\alpha}$

8. $\sin\alpha\cos\alpha-\cos^2\alpha+1$

9. $\dfrac{2\cos\alpha+\sin\alpha}{\sqrt{2}\sin\alpha+2\cos(\alpha+45°)}$

10. $\dfrac{\sin^2\alpha-\cos\alpha}{\cos^2\alpha}$.

Esercizi: Verificare se valgono le seguenti identità (α e β assumono i valori per i quali sono definite tutte le funzioni che compaiono nell'espressione)

1. $\cos(\alpha-120°)-\sin(\alpha-30°)=0$
2. $\dfrac{\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha}=2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$
3. $\dfrac{\cot\alpha-\tan\alpha}{\cot\alpha+\tan\alpha}=\cos 2\alpha$
4. $(1+\sin\alpha-\cos\alpha)^2+(1-\sin\alpha+\cos\alpha)^2=2(2-\sin 2\alpha)$
5. $\sin^2\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)-\sin^2\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)=\sin\alpha\sin\beta$
6. $\dfrac{2\cos\alpha+\sin 2\alpha}{2\cos\alpha-\sin 2\alpha}=\left(\dfrac{1}{\cos\alpha}+\tan\alpha\right):\left(\dfrac{1}{\cos\alpha}-\tan\alpha\right)$
7. $\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\alpha+\dfrac{5}{6}\pi\right)=0$
8. $\dfrac{2\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}=\dfrac{1}{\tan\alpha}-\tan\alpha$
9. $\dfrac{2\sin\alpha-\sin 2\alpha}{2\sin\alpha+\sin 2\alpha}=\tan^2\dfrac{\alpha}{2}$
10. $\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)+\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)=\dfrac{2}{1-2\sin^2\alpha}$
11. $\sin^2(\alpha+\beta)-\sin^2(\alpha-\beta)=\sin 2\alpha\sin 2\beta$
12. $\dfrac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}:\dfrac{1+\cos\alpha}{\cos\alpha}=\tan\dfrac{\alpha}{2}$

13. $\cos\left[\frac{\pi}{6}-(\alpha+\beta)\right]-\sin(\alpha+\beta)=\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha+\beta\right)$

14. $\frac{1-\cos\alpha-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{2\cos\alpha}=\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{1+\cos\alpha}$

15. $\frac{2\cos\alpha+\sin 2\alpha}{2\cos\alpha-\sin 2\alpha}=\frac{\sec\alpha+\tan\alpha}{\sec\alpha-\tan\alpha}$

16. $\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=\cos\alpha$

17. $\sin 3\alpha\cdot\sin\alpha=\cos^2\alpha-\cos^2 2\alpha$

18. $\frac{1-\tan^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{1+\tan^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}=\sin 2\alpha$

19. $\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{\sin\alpha-\sin\beta}=\cot\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

20. $\frac{1}{2}\sin 2\alpha=\sin\alpha\left(1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)$

21. $\frac{\cos(45^\circ+\alpha)}{\cos 2\alpha}=\frac{1}{\cos(45^\circ-\alpha)}$

22. $\sin\alpha-2\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot\cot\alpha=\tan\frac{\alpha}{2}$

23. $\frac{\sin 2\alpha-\sin 4\alpha}{\cos 4\alpha-\cos 2\alpha}=\cot 3\alpha$

24. $\frac{1+\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\frac{1}{2}(1+\tan\alpha)^2$

25. $\cos(60^\circ-\alpha)-\cos(120^\circ-\alpha)=\cos\alpha$

26. $\tan\alpha\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}\sin\alpha=\frac{1}{2}\tan\alpha$

27. $\frac{\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)}{\sqrt{3}\cos\alpha}=\frac{\sqrt{3}}{6}\left(\sqrt{3}\tan\alpha+1\right)$

28. $\cos^2\left(\alpha+\frac{2}{3}\pi\right)+\cos^2\left(\alpha-\frac{2}{3}\pi\right)=\frac{1}{2}+\sin^2\alpha$

29. $4\left(1+\cot^2\frac{\alpha}{2}\right)+\tan^2\frac{\alpha}{2}=\frac{(3+\cos\alpha)^2}{\sin^2\alpha}$

30. $\frac{\tan(45^\circ+\alpha)}{\tan(45^\circ-\alpha)}=\frac{1+\sin 2\alpha}{1-\sin 2\alpha}$

31. $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=\frac{1+\sqrt{3}}{2}(\cos\alpha+\sin\alpha)$

32. $(\cos\alpha-\sin\alpha)^2=1-\sin 2\alpha$

33. $\frac{2\tan^2\alpha}{1+\tan^4\alpha}=\frac{\tan^2 2\alpha}{2+\tan^2 2\alpha}$

34. $\cos(\alpha+\beta)-\cos(\beta-\alpha)=2\cos\alpha\cos\beta$

35. $\frac{\sin 3\alpha\cos\alpha}{\sin 2\alpha}=\frac{1}{2}+\cos 2\alpha$

36. $\tan 2\alpha\left(1-2\sin^2\alpha\right)=\sin 2\alpha$

37. $\frac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}-\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\frac{\sqrt{2}}{2\cos(\alpha+45^\circ)}$

38. $\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)-\tan\alpha=\tan\alpha\cdot\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)-1$

39. $\frac{\sin^2\alpha}{1-\cos\alpha}=2\cos^2\frac{\alpha}{2}$

40. $\cos(\alpha+45^\circ)-\cos(\alpha-45^\circ)=\frac{1}{2}-\sin^2\alpha$

41. $\frac{\tan\alpha-\sin\alpha}{2\tan\alpha}=\sin^2\frac{\alpha}{2}$

42. $\cos 2\alpha+\sin 2\alpha=(\cos\alpha+\sin\alpha)^2-2\sin^2\alpha$

43. $\frac{1}{2}\left(\tan^2\alpha+\cot^2\alpha\right)=\frac{3+\cos 4\alpha}{1-\cos 4\alpha}$

44. $\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+\sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)=\sin 2\alpha$

45. $\tan\alpha \cdot \tan\dfrac{\alpha}{2} + 1 = \sec\alpha$

46. $\dfrac{\cos 3\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha - \sin 3\alpha} = \tan 2\alpha$

47. $\dfrac{2}{\sin 2\alpha} = \tan\alpha + \cot\alpha$

48. $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}} = \sqrt{2}\sin\left(\dfrac{3}{4}\pi - \dfrac{\alpha}{2}\right)$

49. $2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = \cos 2\alpha + \cos 2\beta$

50. $1 - \dfrac{1}{2\cos^2\alpha} = \dfrac{\tan\alpha}{\tan 2\alpha}$

51. $\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right) + \cos\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right) = \dfrac{\sqrt{2}\cos 2\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha}$

52. $\dfrac{\cos 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha} = \dfrac{\cot\alpha - 1}{\cot\alpha + 1}$

53. $\tan\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\alpha}{2}\right) - \tan\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\alpha}{2}\right) = 2\tan\alpha$

54. $\sin 2\alpha + 2\sin\alpha\sin^2\dfrac{\alpha}{2} = 2\sin\alpha$

55. $\cos(\alpha-\beta) + 2\sin^2\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right) = 1$

56. $\dfrac{\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha}{\cos\alpha} = 4\cos\dfrac{\alpha}{2} \cdot \sin\dfrac{3\alpha}{2}$

57. $\dfrac{\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha} = 1 - \tan^2\alpha$

58. $\dfrac{(\cos\alpha + \sin\alpha)^2}{1 + \cos 2\alpha} = \dfrac{1}{2}(1 + \tan\alpha)^2$

59. $\sin\alpha + \cos\alpha = \dfrac{2\tan\frac{\alpha}{2} + 2}{1 + \tan^2\frac{\alpha}{2}} + 1$

60. $\cos\alpha - \cos(\alpha+\beta) = 2\sin\left(\alpha + \dfrac{\beta}{2}\right)\sin\dfrac{\beta}{2}\,.$