Spazi compatti

Def. Un *ricoprimento aperto* di uno spazio topologico X è una famiglia $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ di aperti di X, con A insieme arbitrario, t.c.

$$\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = X.$$

Un *sottoricoprimento* di $\mathcal{U}$ per X è una sottofamiglia $\mathcal{U}' = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A'}$, con $A' \subset A$, che sia a sua volta un ricoprimento aperto, ossia

$$\bigcup_{\alpha \in A'} U_\alpha = X.$$

Def. Uno spazio topologico X è *compatto* se ogni ricoprimento aperto di X ammette un *sottoricoprimento finito*.

Oss. X compatto $\Leftrightarrow \forall\, \mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ricoprimento aperto di X, $\exists\, n \in \mathbb{N}$, $\exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in A$ t.c.

$$\bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i} = X.$$

Oss. X non compatto $\Leftrightarrow \exists\, \mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ricoprimento aperto di X t.c. $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\forall\, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in A$ si ha

$$\bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i} \subsetneq X.$$

Oss. X_{ban} compatto $\forall\, X$.
X finito $\Rightarrow$ X compatto.
X_{dis} compatto $\Leftrightarrow$ X_{dis} finito: $\{\{x\}\}_{x \in X_{\text{dis}}}$ ricoprimento aperto di X_{dis}.
$\mathbf{R}^n$ non compatto $\forall\, n \geqslant 1$: $\{B(0,k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ non ha sottoricoprimenti finiti.
$\mathbf{R}_\ell$ non compatto: $\{[-k, k[\}_{k \in \mathbb{N}}$ non ha sottoricoprimenti finiti.

La dimostrazione della Proposizione seguente è lasciata per Esercizio.

Prop. *La compattezza è una proprietà topologica.*

Def. Sia $\mathcal{B}$ base per X. Un ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ di X è *basico* se $U_\alpha \in \mathcal{B}\ \forall\, \alpha \in A$.

Prop. *Sia $\mathcal{B}$ base per X. Allora X è compatto $\Leftrightarrow$ ogni ricoprimento basico di X ammette un sottoricoprimento finito.*

Dim. $\boxed{\Rightarrow}$ Banale.

$\boxed{\Leftarrow}$ $\forall\, \mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ricoprimento aperto di $X \rightsquigarrow$

$$\mathcal{V} = \{B \in \mathcal{B} \mid \exists\, \alpha \in A \text{ t.c. } B \subset U_\alpha\}$$

ricoprimento basico di $X \rightsquigarrow \{B_1, \dots, B_n\}$ sottoricoprimento finito di $\mathcal{V} \Rightarrow \forall\, i \in \{1, \dots, n\}$, $\exists\, \alpha_i \in A$ t.c. $B_i \subset U_{\alpha_i} \Rightarrow \{U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_n}\}$ sottoricoprimento finito di $\mathcal{U}$. $\square$

Teor. $[0,1]$ *è compatto come sottospazio di* $\mathbf{R}$.

Dim. Gli intervalli del tipo $[0,b[$, $]a,1]$, $]a,b[$, $\forall\, 0 \leqslant a < b \leqslant 1$ sono base per $[0,1]$, ottenuta intersecando la base di intervalli aperti di $\mathbf{R}$ con $[0,1]$.
$\forall\, \mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ ricoprimento basico per $[0,1]$ consideriamo

$$T := \left\{ t \in [0,1] \;\middle|\; \exists\, n \in \mathbb{N}, \exists\, \alpha_1 \dots, \alpha_n \in A \text{ t.c. } [0,t] \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i} \right\}.$$

In altre parole: $t \in T \Leftrightarrow [0,t]$ finitamente ricoperto da aperti di $\mathcal{U}$.

$\exists\, a < b$ t.c. $U_0 = [0,a[$ e $U_1 =]b,1] \in \mathcal{U} \Rightarrow U_0 \subset T \neq \emptyset$.

$s := \sup T > 0$. Mostriamo che $s = 1$. Se per assurdo $s < 1 \Rightarrow$
$\exists\, \alpha \in A$ t.c. $s \in U_\alpha \Rightarrow \exists\, t \in T \cap U_\alpha$, $\exists\, s' > s$ t.c. $s' \in U_\alpha \rightsquigarrow$
$[0,t] \subset U_{\alpha_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_n} \Rightarrow [0,s'] = [0,t] \cup [t,s'] \subset U_{\alpha_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_n} \cup U_\alpha \Rightarrow$
$s' \in T$ contraddizione. Pertanto $s = 1$.

$\exists\, t \in T \cap U_1 \rightsquigarrow [0,1] = [0,t] \cup [t,1] \subset U_{\alpha_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_n} \cup U_1 \Rightarrow 1 \in T \Rightarrow$
$T = [0,1] \Rightarrow \mathcal{U}$ ammette sottoricoprimento finito. $\square$

Oss. $[0,1] \subset \mathbf{R}_\ell$ *non* è compatto nella topologia di Sorgenfrey.

$$\mathcal{U} = \left\{ \left[\frac{n-1}{n}, \frac{n}{n+1} \right[\right\}_{n\in\mathbb{N}} \bigcup \{\{1\}\}$$

ricoprimento mediante aperti disgiunti $\Rightarrow$ non ha sottoricoprimenti propri.

Teor. X *compatto e* $Y \subset X$ *chiuso* $\Rightarrow Y$ *compatto.*

Dim. $\forall\, \mathcal{V} = \{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ ricoprimento aperto di $Y \Rightarrow \forall\, \alpha \in A$, $\exists\, U_\alpha \subset X$ aperto t.c. $V_\alpha = U_\alpha \cap Y \Rightarrow \mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A} \cup \{X - Y\}$ ricoprimento aperto di $X \rightsquigarrow$
$\{U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_n}, X - Y\}$ sottoricoprimento finito di $\mathcal{U}$ per $X \Rightarrow$
$\{V_{\alpha_1}, \dots, V_{\alpha_n}\}$ sottoricoprimento finito di $\mathcal{V}$ per Y. $\square$

Oss. Non vale implicazione inversa: $\mathbf{R}_{\text{ban}}$ compatto, $Y = \{0\} \subset \mathbf{R}_{\text{ban}}$ compatto non chiuso.

Teor. X *compatto e* $f : X \to Y$ *continua e suriettiva* $\Rightarrow Y$ *compatto.*

Dim. $\forall\, \mathcal{V} = \{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ ricoprimento aperto di $Y \Rightarrow U_\alpha := f^{-1}(V_\alpha)$ aperto in X e $V_\alpha = f(U_\alpha)$ perché f suriettiva. $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ ricoprimento aperto di $X \rightsquigarrow \{U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_n}\}$ sottoricoprimento finito di $\mathcal{U}$ per $X \Rightarrow \{V_{\alpha_1}, \dots, V_{\alpha_n}\}$ sottoricoprimento finito di $\mathcal{V}$ per $Y = f(X)$. $\square$

Cor. X *compatto e* $f : X \to Y$ *continua* $\Rightarrow f(X) \subset Y$ *compatto.*

Oss. In altre parole: l'immagine continua di un compatto è compatta.

Lavoro di gruppo. S^1 è compatto? Sì!

$$f : [0,1] \to S^1$$
$$f(x) = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$$

continua e suriettiva.