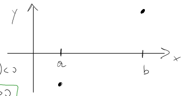
23 ottobre

Teor (zeri per funzioni continue) Sia $f \in C^0([a,b])$ t.c. $f(a)\,f(b) < 0$. Allora $\exists\, c \in (a,b)$ t.c. $f(c) = 0$.



Dim

$f(a)f(b) < 0$ significa che $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$ oppure $\boxed{f(a) < 0 \text{ e } f(b) > 0}$

Non è restrittivo assumere

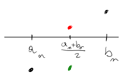
Poniamo $a_0 = a$ e $b_0 = b$ e definiamo tramite un procedimento ricorsivo una successione di intervalli

Supponiamo di avere definito $[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset \dots \supset [a_n, b_n]$

con sempre $f(a_j) < 0 < f(b_j)$ $\forall\, j = 0, \dots, n$

ed inoltre con $b_j - a_j = \dfrac{b-a}{2^j}$ e consideriamo

l'intervallo $[a_n, b_n]$



Ora dividiamo $[a_n, b_n]$ a metà $\dfrac{a_n+b_n}{2}$

E nota $f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right)$. Se $f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) = 0$ poniamo $c = \dfrac{a_n+b_n}{2}$. Supponiamo che $f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) > 0$

Allora definiamo $[a_{n+1}, b_{n+1}] = \left[a_n, \dfrac{a_n+b_n}{2}\right]$

Se invece $f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) < 0$ allora definiamo

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] = \left[\frac{a_n+b_n}{2}, b_n\right]$$

A meno che, dopo un numero finito di passi, non si sia raggiunto uno zero della forma $\dfrac{a_n+b_n}{2}$, resta definita una successione di intervalli. $[a_{n+1}, b_{n+1}]$

(Notare che ~~che~~ lunghezza di $\left[a_n, \dfrac{a_n+b_n}{2}\right] =$

$= \dfrac{1}{2}$ lunghezza di $[a_n, b_n] = \dfrac{1}{2} \quad \dfrac{b-a}{2^n} = \dfrac{b-a}{2^{n+1}}$)

$\{[a_n, b_n]\}$, $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$ e con

$$f(a_n) < 0 < f(b_n)$$

$$[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots\dots$$

Consideriamo le successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$.

Sono entrambi successioni monotone; In particolare $\{a_n\}$ è crescente e $\{b_n\}$ è decrescente.

$\Rightarrow$ esistono i limiti $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = A$

$\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = \inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\} = B$

Sappiamo che $a \leq A \leq b$
$a \leq B \leq b$ con $A \leq B$

Dimostriamo che $B - A = 0$

$$B - A = \lim_{n \to +\infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \to +\infty} \frac{b-a}{2^n} = 0$$

Pongo $c = B = A$

Verifichiamo ora che $f(c)=0$

Ricordo che $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = c$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = c$

Supponiamo che f è continua in c

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = c \overset{\text{(continuità)}}{\Longrightarrow} \lim_{n\to+\infty} \overbrace{f(a_n)}^{<0} = f(c) \leq 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = c \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \overbrace{f(b_n)}^{\geq 0} = f(c) \geq 0$$

$$\Longrightarrow f(c) = 0.$$

$\square$

<u>Corollario</u> Sia $p(x) = a_{2n+1}x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} + \dots + a_1x + a_0$ un polinomio di grado $\deg P = 2n+1$ dispari a coefficienti reali (cioè $0 \neq a_{2n+1}, a_{2n}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$)

Allora $p(x)$ ha almeno una radice reale.

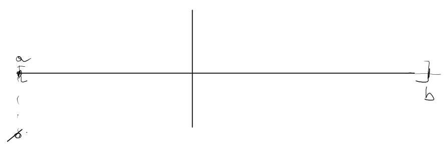
(Osservazione $p(x) = x^2+1$ ha radici $\pm i$, entrambe non in $\mathbb{R}$.)

<u>Dim</u> $a_{2n+1} \neq 0$ e non è restrittivo assumere $a_{2n+1} > 0$

$$\lim_{x\to+\infty} p(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(a_{2n+1}x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} + \dots + a_1x + a_0\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} a_{2n+1}x^{2n+1} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} p(x) = \lim_{x\to-\infty} a_{2n+1}x^{2n+1} = -\infty$$



Questi due limiti implicano l'esistenza di due punti $a < b$ e con $p(a) < 0 < p(b)$

La restrizione di p nell'intervallo $[a,b]$ è in $C^0([a,b])$

Per il teorema degli zeri $\exists\, c \in (a,b)$ t.c. $p(c) = 0$

$\square$

Corollario (teorema dei valori intermedi)

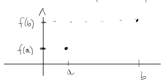
Sia $f \in C^0([a,b])$ e sia y_0 un numero intermedio tra $f(a)$ ed $f(b)$

(cioè $f(a) \le y_0 \le f(b)$ oppure $f(b) \le y_0 \le f(a)$)

Allora $\exists\, c \in [a,b]$ t.c. $f(c) = y_0$.

Dim Per fissare le idee sia $f(a) \le f(b)$

Sia y_0 t.c. $f(a) \le y_0 \le f(b)$



Se $y_0 = f(a)$ scegliere $c = a$

se $y_0 = f(b)$ si può scegliere $c = b$

Supponiamo ora che $f(a) < y_0 < f(b)$.

Definiamo $g(x) = f(x) - y_0$

Abbiamo $g \in C^0([a,b])$ con

$g(a) = f(a) - y_0 < 0$ e

$g(b) = f(b) - y_0 > 0$

Per il teorema degli zeri $\exists\, c \in (a,b)$ t.c. $g(c) = 0$

$$g(c) = f(c) - y_0 = 0 \iff f(c) = y_0 \quad \square$$

Osservazione Il teorema dei valori intermedi può essere equivalentemente espresso dicendo che se $f \in C^0(I)$ ed I è un intervallo allora $f(I) = \{f(x) : x \in I\}$ è "connesso", cioè è un intervallo oppure un insieme formato da un unico punto.

Esempio $e^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e^x è continua in $\mathbb{R}$

Ha immagine $\mathbb{R}_+ = (0,+\infty)$. Chiamiamo Y l'immagine

Infatti e^x è crescente

$$\Rightarrow +\infty = \lim_{x\to+\infty} e^x = \sup Y \qquad \boxed{\sup Y = +\infty}$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^{-x}} = 0 = \inf Y$$

Y è un intervallo di $\mathbb{R}$ con $\inf Y = 0$ e $\sup Y = +\infty$

$Y <$ $\cancel{[0,+\infty)}$ $\quad 0 \ne e^x \ \forall x \in \mathbb{R}$

$\boxed{(0,+\infty)}$

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \ ? \qquad \forall M > 0 \ \exists \tilde{K}_M \text{ t.c. } x \ge \tilde{K}_M \Rightarrow e^x > M$$

Supponiamo che $\lim_{n\to+\infty} e^n = +\infty$ (1)

$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ (2)

(1) implica che per ogni $M > 0 \ \exists K_M$ t.c. $n \ge K_M \Rightarrow e^n > M$