Tutorato Analisi 1 M-Z
Soluzioni esercitazione 2

Clemente Romano

23 ottobre 2023

1. Dimostrare la continuità delle seguenti funzioni utilizzando la definizione ϵ-δ :
   (a) $f(x) = x^2$
   (b) $f(x) = x^3$
   (c) $f(x) = |x+2|$
   (d) $f(x) = 49$

Ricordiamo la definizione di funzione continua :

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, si dice che f è continua se (e solo se)

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}\ \forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ :\ \forall x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[\ \ |f(x)-f(x_0)| < \epsilon$$

cioè detto in altri termini preso un qualsiasi $x_0 \in \mathbb{R}$ e un qualsiasi $\epsilon > 0$ esiste un certo $\delta > 0$ tale che, se $x \in \mathbb{R}$ soddisfa la disuguaglianza $|x-x_0| < \delta$ allora si ha $|f(x)-f(x_0)| < \epsilon$, ciò che faremo sarà trovare un $\delta > 0$ esplicito in funzione di ϵ e x_0 in modo che la disuguaglianza sia verificata.

Soluzione :

(a)

Ricordiamo che vale la formula $(a^2-b^2) = (a+b)(a-b)$

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ e sia $\epsilon > 0$, sia $x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[$ con $\delta > 0$ che verrà scelto in seguito, abbiamo che

$$\begin{aligned} |f(x)-f(x_0)| &= |x^2-x_0^2| = |(x-x_0)(x+x_0)| = |x-x_0| \cdot |x+x_0| \\ &= |x-x_0| \cdot |(x-x_0)+2x_0| \overset{\substack{\text{disuguaglianza} \\ \text{triangolare}}}{\leq} |x-x_0| \cdot (|x-x_0| + 2|x_0|) \\ &\overset{|x-x_0|<\delta}{<} \delta(\delta + 2|x_0|) \end{aligned}$$

cioè abbiamo dimostrato che

$$|f(x)-f(x_0)| < \delta(\delta+2|x_0|)$$

allora se vogliamo garantire che $|f(x)-f(x_0)| < \epsilon$ ci basterà garantire che $\delta(\delta+2|x_0|) \leq \epsilon$, dato che δ è a mia scelta posso imporre che $\delta \leq 1$, avremo quindi

$$\delta(\delta+2|x_0|) \leq \delta(1+2|x_0|)$$

allora ci basterà imporre che

$$\delta(1+2|x_0|) \leq \epsilon$$

cioè

$$\delta \leq \frac{\epsilon}{1+2|x_0|}$$

quindi posso scegliere un qualsiasi $\delta > 0$ che sia

$$\begin{cases} \delta & \leq 1 \\ \delta & \leq \frac{\epsilon}{1+2|x_0|} \end{cases}$$

per esempio posso prendere il minimo tra queste due quantità, quindi posso porre

$$\delta = \min\{1, \frac{1}{1+2|x_0|}\}$$

(b)
Ricordiamo che vale la formula $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$.
Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ e sia $\epsilon > 0$, sia $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ con $\delta > 0$ che verrà scelto in seguito, abbiamo che

$$|f(x) - f(x_0)| = |x^3 - x_0^3| = |(x-x_0)(x^2 + xx_0 + x_0^2)| = |x - x_0| \cdot |x^2 + xx_0 + x_0^2| \tag{1}$$

vogliamo maggiorare la quantità $|x^2 + xx_0 + x_0^2|$, per semplicità lo facciamo a parte
la disuguaglianza triangolare ci dice che

$$|x| = |(x - x_0) + x_0| \leq |x - x_0| + |x_0| \tag{2}$$

otteniamo quindi

$$\begin{aligned} |x^2 + xx_0 + x_0^2| &\overset{\substack{\text{disuguaglianza}\\ \text{triangolare}}}{\leq} |x|^2 + |x| \cdot |x_0| + |x_0|^2 \\ &\overset{\text{disuguaglianza2}}{\leq} (|x - x_0| + |x_0|)^2 + (|x - x_0| + |x_0|) \cdot |x_0| + |x_0|^2 \\ &\overset{\text{facendo i conti}}{=} |x - x_0|^2 + 3|x - x_0| \cdot |x_0| + 3|x_0|^2 \end{aligned} \tag{3}$$

a questo punto sostituendo la 3 nella 1 otteniamo

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq |x - x_0| \cdot (|x - x_0|^2 + 3|x - x_0| \cdot |x_0| + 3|x_0|^2) \\ &\overset{|x-x_0|<\delta}{<} \delta(\delta^2 + 3|x_0|\delta + 3|x_0|^2) \end{aligned} \tag{4}$$

quindi per garantire che $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ è sufficiente garantire che

$$\delta(\delta^2 + 3|x_0|\delta + 3|x_0|^2) \leq \epsilon \tag{5}$$

ciò che dobbiamo fare adesso è trovare un $\delta > 0$ che soddisfi la disuguaglianza 5, possiamo procedere in due modi :

Metodo 1)
sommando $|x_0|^3$ ambo i membri della disuguaglianza 5 abbiamo che la 5 è soddisfatta se e solo se

$$|x_0|^3 + \delta(\delta^2 + 3|x_0|\delta + 3|x_0|^2) \leq \epsilon + |x_0|^3$$

osserviamo che il membro a sinistra dell'uguale coincide con $(|x_0| + \delta)^3$ infatti

$$(|x_0| + \delta)^3 = |x_0|^3 + 3|x_0|^2\delta + 3|x_0|\delta^2 + \delta^3$$

quindi la (5) è soddisfatta se e solo se

$$(|x_0| + \delta)^3 \leq |x_0|^3 + \epsilon \tag{6}$$

consideriamo la funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita come

$$g(x) := \sqrt[3]{x}$$

(osserviamo che g è ben definita anche per $x < 0$)
si può dimostrare che $a < b$ se e solo se $g(a) < g(b)$, è possibile quindi applicare g ad ambo i membri della 6 e ottenere la disuguaglianza equivalente

$$|x_0| + \delta \leq \sqrt[3]{|x_0|^3 + \epsilon}$$

che è soddisfatta se e solo se

$$\delta \leq \sqrt[3]{|x_0|^3 + \epsilon} - |x_0|$$

possiamo quindi porre

$$\delta = \sqrt[3]{|x_0|^3 + \epsilon} - |x_0|$$

osserviamo che, di nuovo grazie proprietà della funzione $g = \sqrt[3]{\cdot}$, $\delta > 0$
Metodo 2)
dato che è sufficiente trovare un $\delta > 0$ che soddisfa la 5, posso supporre $\delta \leq 1$, in questo modo abbiamo

$$\delta(\delta^2 + 3|x_0|\delta + 3|x_0|^2) \leq \delta(1 + 3|x_0| + 3|x_0|^2) \tag{7}$$

allora è sufficiente imporre che

$$\delta(1 + 3|x_0| + 3|x_0|^2) \leq \epsilon \tag{8}$$

cioè

$$\delta \leq \frac{\epsilon}{1 + 3|x_0| + 3|x_0|^2} \tag{9}$$

ricordandoci che abbiamo supposto $\delta \leq 1$ dobbiamo trovare un $\delta > 0$ per cui si abbia

$$\begin{cases} \delta & \leq \frac{\epsilon}{1+3|x_0|+3|x_0|^2} \\ \delta & \leq 1 \end{cases} \tag{10}$$

per esempio possiamo prendere δ pari al minimo delle due quantità, ovvero

$$\delta = \min\{1, \frac{\epsilon}{1 + 3|x_0| + 3|x_0|^2}\}$$

(c)
usando la disuguaglianza triangolare inversa abbiamo

$$|f(x) - f(x_0)| = |\,|x + 2| - |x_0 + 2|\,| \leq |(x + 2) - (x_0 + 2)| = |x - x_0|$$

allora dato che $|x - x_0| < \delta$ è sufficiente porre $\delta = \epsilon$
(d)
abbiamo che qualsiasi siano $x, x_0 \in \mathbb{R}$ e $\epsilon > 0$ si ha

$$|f(x) - f(x_0)| = |49 - 49| = 0 < \epsilon$$

quindi possiamo prendere un $\delta > 0$ qualsiasi, per esempio $\delta = 1$ (o anche $\delta = 99$)

2. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione che soddisfa la seguente proprietà:

$$\exists L > 0 \ : \ |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|^2 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

dimostrare che f è continua.

Soluzione :
Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ e sia $\epsilon > 0$, se $x \in \mathbb{R}$ e $|x - x_0| < \delta$ ($\delta > 0$ che verrà scelto in seguito) abbiamo che

$$|f(x) - f(x_0)| \leq L|x - x_0|^2 < L\delta^2$$

quindi è sufficiente che si abbia

$$L\delta^2 \leq \epsilon$$

ciò è verificato quando

$$\delta \leq \sqrt{\frac{\epsilon}{L}}$$

[1]

quindi è sufficiente porre

$$\delta = \sqrt{\frac{\epsilon}{L}}$$

3. Dimostrare che la norma euclidea

$$\|\cdot\| \,:\, \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$$

è una funzione continua

Soluzione :

Ricordiamo che una funzione $f \,:\, \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ si dice continua se (e solo se)

$$\forall \boldsymbol{x_0} \in \mathbb{R}^N \;\; \forall \epsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;:\; \forall \boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{x_0}, \delta) \;\; |f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x_0})| < \epsilon$$

cioè in altri termini qualsiasi sia $\boldsymbol{x_0} \in \mathbb{R}^N$ e qualsiasi sia $\epsilon > 0$ esiste un certo $\delta > 0$ tale che se $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}\| < \delta$ si ha che $|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x_0})| < \epsilon$

Nel nostro caso $f(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x}\|$.

Sia quindi $\boldsymbol{x_0} \in \mathbb{R}^N$, $\epsilon > 0$, e $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}\| < \delta$ con $\delta > 0$ che verrà scelto in seguito, la disuguaglianza triangolare inversa ci dice che

$$|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x_0})| = |\,\|\boldsymbol{x}\| - \|\boldsymbol{x_0}\|\,| \leq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}\| < \delta$$

quindi è sufficiente porre $\delta = \epsilon$

4. Sia $f \,:\, \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua che non è mai uguale a 0, si mostri che per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ si ha

$$f(x) \cdot f(y) > 0$$

Soluzione :

Supponiamo per assurdo che esistano $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $f(a) \cdot f(b) \leq 0$

possiamo supporre senza ledere la generalità che $a \leq b$ Se si avesse che $f(a) \cdot f(b) = 0$ allora, per la legge di annullamento del prodotto, uno tra $f(a)$ e $f(b)$ dovrebbe essere uguale a 0, ma ciò contraddirebbe il fatto che f non è mai uguale a 0, quindi $f(a) \cdot f(b)$ non può essere uguale a 0, allora si ha

$$f(a) \cdot f(b) < 0 \tag{11}$$

ciò ci dice che $a \neq b$ infatti se fosse $a = b$ avremmo che $f(a) \cdot f(b) = f^2(a) \geq 0$, che contraddice la 11.

Ci sono due possibilità :

1) $f(a) < 0$, $f(b) > 0$
2) $f(a) > 0$, $f(b) < 0$

in entrambi i casi il teorema degli zeri implica l'esistenza di un $\chi \in]a, b[$ tale che $f(\chi) = 0$, ma ciò contraddice l'ipotesi che f non si annulla mai.

[1] ricordiamo che stiamo supponendo $\delta > 0$!

Email: clemente.romano@sissa.it

5. Si dimostri che esiste un $\xi \in \mathbb{R}$ tale che $\xi > 0$ e $\xi^2 = 2$ usando il teorema degli zeri e la funzione $f(x) = x^2 - 2$

Soluzione :

consideriamo la funzione $f(x) = x^2 - 2$, è un polinomio quindi è una funzione continua, è definita in $[0, 2]$ e si ha $f(0) = -2 < 0$, $f(2) = 2 > 0$, quindi per il teorema degli zeri esiste un $\xi \in]0, 2[$ tale che $f(\xi) = 0$

6. Mostrare un esempio di una funzione $f \ :]0, 1] \to \mathbb{R}$ continua ma illimitata, e di una funzione $f \ : \ [0, \infty[\to \mathbb{R}$ continua ma illimitata.

Soluzione :

Sia $D \subset \mathbb{R}$ un insieme non vuoto e $f \ : \ D \to \mathbb{R}$ una funzione, si dice che f è una funzione continua se (e solo se)

$$\forall x_0 \in D \, \forall \epsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ : \ \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap D \ \ |f(x) - f(x_0)| < \epsilon \tag{12}$$

si dice che f è una funzione limitata se (e solo se)

$$\exists M > 0 \ : \ \forall x \in D \ \ |f(x)| \leq M \tag{13}$$

Per la prima possiamo porre

$$f \ :]0, 1] \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = \frac{1}{x}$$

f è una funzione continua, infatti soddisfa la condizione 12 [2], ed è una funzione illimitata :

Se f fosse limitata esisterebbe $M > 0$ che soddisfa la 13, tuttavia è sufficiente prendere $x = 1/(1+M)$ e si ha

$$f(x) = f\left(\frac{1}{1+M}\right) = 1 + M > M$$

che nega la 13

per quanto riguarda la (2) è sufficiente porre

$$f \ : \ [0, \infty[\to \mathbb{R}$$
$$f(x) = x$$

f è una funzione continua in quanto è restrizione di una funzione continua (la funzione $g(x) = x$ con dominio $\mathbb{R}$), ed è chiaramente illimitata (basta prendere $x = M + 1$)

7. Si mostri un esempio di una funzione continua $f \ : \ [-2, -1] \cup [1, 2] \to \mathbb{R}$ tale che $f(-2) < 0$ e $f(2) > 0$ con $f(x) \neq 0$ per ogni x nel dominio, questo contraddice il teorema degli zeri?

Soluzione :

Possiamo prendere per esempio la funzione

$$f \ : \ [-2, -1] \cup [1, 2] \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = x$$

$f(-2) = -2 < 0$, $f(2) = 2 > 0$ e f non si annulla mai (si "annullerebbe" in 0 ma 0 non fa parte del dominio). questo esempio non contraddice il teorema degli zeri in quanto f non è definita su tutto l'intervallo $[-2, 2]$ ma soltanto in $[-2, -1] \cup [1, 2]$, mentre le ipotesi del teorema degli zeri richiedono che la funzione sia definita su tutto l'intervallo $[a, b]$ (nel nostro caso $a = -2$ e $b = 2$)

[2] si può porre $\delta = \min\{\frac{x_0}{2}, \frac{\epsilon {x_0}^2}{4}\}$, oppure si può usare il teorema riguardo il rapporto tra funzioni continue

8. Sia $g(x) = f(x) + x^3$ dove f è la funzione dell'esercizio 2, si dimostri che $g(x)$ ammette almeno uno 0.

abbiamo dimostrato che f è una funzione continua e che x^3 è una funzione continua, allora g è funzione continua in quanto è la somma di due funzioni continue, la strategia che useremo per dimostrare l'esistenza di uno 0 consiste nell'utilizzare il teorema degli zeri, vogliamo quindi trovare un $a < b$ tale che $g(a) < 0 < g(b)$.

L'idea è che se prendiamo $x >> 0$ molto grande, allora il termine x^3 dovrà prevalere su $f(x)$, in modo che $g(x) > 0$, vediamo più nel dettaglio, abbiamo che

$$|f(x)| \overset{\substack{\text{disuguaglianza}\\ \text{triangolare}}}{\leq} |f(0)| + |f(x) - f(0)| \leq |f(0)| + L|x - 0|^2 = |f(0)| + Lx^2 \tag{14}$$

moltiplicando la 14 per -1 otteniamo la disuguaglianza

$$-|f(0)| - Lx^2 \leq -|f(x)| \leq |f(x)| \leq |f(0)| + Lx^2 \tag{15}$$

abbiamo quindi

$$g(x) = x^3 + f(x) \geq x^3 - |f(x)| \overset{\text{disuguaglianza 15}}{\geq} x^3 - Lx^2 - |f(0)| = x^3\left(1 - \frac{L}{x} - \frac{|f(0)|}{x^3}\right) \tag{16}$$

se voglio che $g(x) > 0$ è sufficiente che $x > 0$ e $1 - \frac{L}{x} - \frac{|f(0)|}{x^3} > 0$, esiste chiaramente un $x > 0$ che soddisfa queste due disuguaglianze, per semplicità non lo dimostro [3]

abbiamo quindi dimostrato l'esistenza di un $b > 0$ tale che $g(b) > 0$, analogamente possiamo dimostrare l'esistenza di un $a < 0$ tale che $g(a) < 0$

$$g(x) = x^3 + f(x) \leq x^3 + |f(x)| \overset{\text{disuguaglianza 15}}{\leq} x^3 + Lx^2 + |f(0)| = x^3\left(1 + \frac{L}{x} + \frac{|f(0)|}{x^3}\right) \tag{17}$$

se voglio che $g(x) > 0$ è sufficiente che $x < 0$ e $1 - \frac{L}{x} - \frac{|f(0)|}{x^3} > 0$, esiste chiaramente un $x < 0$ che soddisfa queste due disuguaglianze, per semplicità non lo dimostro [4]

quindi esista $a < 0$ tale che $g(a) < 0$

a questo punto basta usare il teorema degli zeri per concludere

9. Un caso particolare della disuguaglianza media geometrica media aritmetica è la seguente disuguaglianza

$$2xy \leq x^2 + y^2$$

valida per ogni $x, y \in \mathbb{R}$, la si dimostri usando $(x - y)^2 \geq 0$. Stabilita questa disuguaglianza la si applichi per dimostrare la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz in $\mathbb{R}^2$, con

$$x = \frac{x_i}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \qquad y = \frac{y_i}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}}$$

prima con $i = 1$ e poi con $i = 2$.

Soluzione :

abbiamo chiaramente che $0 \leq (x - y)^2$, sviluppando il quadrato questa diventa $0 \leq x^2 - 2xy + y^2$, sommando $2xy$ ambo i membri diventa

$$2xy \leq x^2 + y^2 \tag{18}$$

usando la 18 con gli x e gli y indicati nella traccia otteniamo le disuguaglianze

[3] si può prendere per esempio $x = \max\{3L, \sqrt[3]{|3f(0)|}\}$

[4] si può prendere per esempio $x = \min\{-3L, -\sqrt[3]{|3f(0)|}\}$

Email: clemente.romano@sissa.it

$$\begin{aligned} \frac{2x_1y_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}\sqrt{y_1^2+y_2^2}} &\leq \frac{x_1^2}{x_1^2+x_2^2}+\frac{y_1^2}{y_1^2+y_2^2} \\ \frac{2x_2y_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}\sqrt{y_1^2+y_2^2}} &\leq \frac{x_2^2}{x_1^2+x_2^2}+\frac{y_2^2}{y_1^2+y_2^2} \end{aligned} \tag{19}$$

sommando membro a membro le due disuguaglianze otteniamo

$$\frac{2(x_1y_1+x_2y_2)}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}\sqrt{y_1^2+y_2^2}} \leq \frac{x_1^2+x_2^2}{x_1^2+x_2^2}+\frac{y_1^2+y_2^2}{y_1^2+y_2^2} = 1+1 = 2 \tag{20}$$

dividendo ambo i membri per 2 otteniamo

$$\frac{x_1y_1+x_2y_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}\sqrt{y_1^2+y_2^2}} \leq 1 \tag{21}$$

adesso moltiplichiamo ambo i membri per $\sqrt{x_1^2+x_2^2}\sqrt{y_1^2+y_2^2}$ e ricaviamo finalmente

$$x_1y_1+x_2y_2 \leq \sqrt{x_1^2+x_2^2}\sqrt{y_1^2+y_2^2} \tag{22}$$

Per altre dimostrazioni che fanno uso direttamente della definizione $\epsilon - \delta$ si possono vedere i video dello youtuber "blackpenredpen", come il seguente `https://www.youtube.com/watch?v=GBuULJ_m-mM`.

Email: clemente.romano@sissa.it