24 ottobre

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

Per prima cosa, partiamo da $\lim_{n \to +\infty} e^n = +\infty$

cioè che

$$\forall M > 0 \quad \exists\, K_M \text{ t.c. } n \geq K_M \Rightarrow e^n > M$$

Vogliamo vedere che

$$\forall M > 0 \quad \exists\, \tilde{K}_M \text{ t.c. } x \geq \tilde{K}_M \Rightarrow e^x > M$$

Utilizzeremo il fatto che e^x è crescente. $\Rightarrow$

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = \sup\{e^x : x \in \mathbb{R}\} = +\infty$$

$$\{e^x : x \in \mathbb{R}\} \supseteq \{e^n : n \in \mathbb{N}\} \Rightarrow$$

$$\sup\{e^x : x \in \mathbb{R}\} \geq \sup\{e^n : n \in \mathbb{N}\} = \lim_{n \to +\infty} e^n = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

$$\{e^x : x \in \mathbb{R}\} = (0, +\infty)$$

Def Sia X un insieme ed $f : X \to \mathbb{R}$. Un punto $x_0 \in X$ si dice un punto di massimo (minimo) se

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall \; x \in X$$

$$\left(f(x) \geq f(x_0) \quad \forall \, x \in X \right)$$

Osservazione L'esistenza di punti di massimo è equivalente all'esistenza

$$\max f(X) = \max \{ f(x) : x \in X \}$$

Teorema (di Weierstrass) Sia $f \in C^0([a,b])$, $a < b$ numeri reali. Allora f ammette sia punti di massimo che punti di minimo.

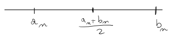
Osservazione. Il teorema resta vero anche nel più generale in cui $f \in C^0(X)$, con $X \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme limitato e "chiuso" (X chiuso significa $X \supseteq X'$)

Dim Si pone $[a_0,b_0]=[a,b]$ e si costruisce per induzione una successione decrescente di intervalli $\{[a_n,b_n]\}$ (cioè $[a_n,b_n]\supset[a_{n+1},b_{n+1}]$ $\forall n$) con $b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n}$ e tali che

$$\sup f([a_n,b_n]) = \sup f([a,b])$$

Supponiamo per induzione di essere arrivati ad n e dimostriamo che $\exists$ $[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n]$ con $b_{n+1}-a_{n+1}=\frac{b-a}{2^{n+1}}$ e con

$$\sup f([a_{n+1},b_{n+1}])=\sup f([a,b])$$



$$[a_n,b_n]=\left[a_n,\frac{a_n+b_n}{2}\right]\cup\left[\frac{a_n+b_n}{2},b_n\right]$$

$$f([a_n,b_n])=f\left(\left[a_n,\frac{a_n+b_n}{2}\right]\right)\cup f\left(\left[\frac{a_n+b_n}{2},b_n\right]\right)$$

$$\sup f([a_n,b_n])=\max\left\{\sup f\left(\left[a_n,\frac{a_n+b_n}{2}\right]\right),\ \sup f\left(\left[\frac{a_n+b_n}{2},b_n\right]\right)\right\}$$

($A,B,C\subseteq\mathbb{R}$ con $A=B\cup C$ $\Rightarrow \sup A=\max\{\sup B,\sup C\}$)

Se $\sup f([a_n,b_n])=\sup f\left(\left[a_n,\frac{a_n+b_n}{2}\right]\right)$

poniamo $[a_{n+1},b_{n+1}]=\left[a_n,\frac{a_n+b_n}{2}\right]$

Se invece $\sup f([a_n,b_n])>\sup f\left(\left[a_n,\frac{a_n+b_n}{2}\right]\right)$

allora sappiamo che $\sup f([a_n,b_n])=\sup\left(\left[\frac{a_n+b_n}{2},b_n\right]\right)$

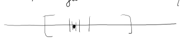
e poniamo $[a_{n+1},b_{n+1}]=\left[\frac{a_n+b_n}{2},b_n\right]$

Risulta che $\sup f([a_{n+1},b_{n+1}])=\sup f([a_n,b_n])$
$=\sup f([a,b])$

$[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n]$

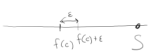
e infine $b_{n+1}-a_{n+1}=\frac{1}{2}(b_n-a_n)=\frac{1}{2}\frac{b-a}{2^n}=\frac{b-a}{2^{n+1}}$

Resta definita per induzione la successione $\{[a_n,b_n]\}$.



$\exists$ $c\in[a,b]$ t.c. $\lim_{n\to+\infty}a_n=c=\lim_{n\to+\infty}b_n$

c deve essere un punto di massimo. Se non è un punto di massimo $\Rightarrow$ $f(c)<\underbrace{\sup f([a,b])}_{S}$



Esiste un $\varepsilon>0$ t.c. $f(c)+\varepsilon<S$.

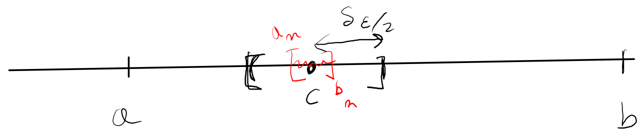
Per la continuità di f in c $\exists$ $\delta_{\varepsilon/2}>0$ t.c.

$$|x-c|\le\delta_{\varepsilon/2}\Rightarrow|f(x)-f(c)|\le\frac{\varepsilon}{2}$$

$c\in[a_n,b_n]$ $\forall n$, dandolo per scontato.

~~Poi~~ Siccome $\lim_{n\to+\infty}2^n=+\infty$ so che $\exists$ $\bar{n}$ t.c.

$$n\ge\bar{n}\Rightarrow 0<\frac{b-a}{2^n}<\delta_{\varepsilon/2}$$



$$|x-c| \le \delta_{\varepsilon/2} \Rightarrow f(c)-\frac{\varepsilon}{2} \le f(x) \le f(c)+\frac{\varepsilon}{2} < f(c)+\varepsilon < S$$

$c\in[a_n,b_n]\ \forall n$. Sia ora n t.c. $b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n} < \delta_{\varepsilon/2}$

Allora $x\in[a_n,b_n] \Rightarrow |x-c|\le \delta_{\varepsilon/2}$

$$x\in[a_n,b_n]\Rightarrow f(x)<f(c)+\varepsilon$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sup f([a_n,b_n])}_{\sup f([a,b])} \le f(c)+\varepsilon < \cancel{\sup}\, S = \sup f([a,b])$$

$$\Rightarrow \sup f([a,b]) < \sup f([a,b])$$

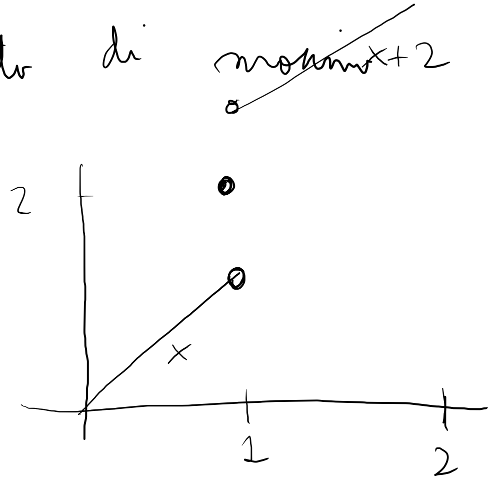
Assurdo

Conclusione: c è un punto di massimo.

Esempi Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ è crescente

a è un punto di minimo

b è un punto di massimo



$$f(x)=\begin{cases} x & 0\le x<1 \\ 2 & x=1 \\ x+2 & 1<x\le 2 \end{cases}$$

Osservazione ~~Data~~ una funzione $f: I\to\mathbb{R}$

una condizione sufficiente perché f sia iniettiva è che sia strettamente monotona.

__Teorema__ Sia I un intervallo e sia $f \in C^0(I)$ strettamente monotona. Poniamo $J = f(I)$ (J è un intervallo). Allora la funzione inversa $g(x) = f^{-1}(x)$ è $g \in C^0(J)$ ed è strettamente monotona.

__Es__ e^x è biettiva $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$

l'inversa $\lg x : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$