Proprietà degli spazi compatti

Teor. *X spazio di Hausdorff, $Y \subset X$ sottospazio compatto, $x \in X - Y \Rightarrow \exists\, U, V \subset X$ aperti t.c. $x \in U$, $Y \subset V$ e $U \cap V = \emptyset$.*

Dim. $\forall\, y \in Y$, $\exists\, U_y, V_y \subset X$ aperti t.c. $x \in U_y$, $y \in V_y$, $U_y \cap V_y = \emptyset \rightsquigarrow \{V_y \cap Y\}_{y \in Y}$ ricoprimento aperto di $Y \rightsquigarrow \{V_{y_1} \cap Y, \dots, V_{y_n} \cap Y\}$ sottoricoprimento finito $\rightsquigarrow$

$$U = \bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i} \qquad V = \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}$$

aperti in X t.c. $x \in U$, $Y \subset V$, $U \cap V = \emptyset$. □

Teor. *X spazio di Hausdorff e $Y \subset X$ sottospazio compatto $\Rightarrow Y$ chiuso.*

Dim. $\forall\, x \in X - Y$, $\exists\, U, V \subset X$ aperti t.c. $x \in U$, $Y \subset V$ e $U \cap V = \emptyset \Rightarrow x \in U \subset X - V \subset X - Y \Rightarrow X - Y$ aperto. □

Teor. *$f : X \to Y$ continua e biiettiva con X compatto e Y di Hausdorff $\Rightarrow f$ omeomorfismo.*

Dim. Basta far vedere che f è chiusa. $\forall\, A \subset X$ chiuso $\Rightarrow A$ compatto $\Rightarrow f(A) \subset Y$ compatto $\Rightarrow f(A)$ chiuso in Y. □

Cor. *$f : X \to Y$ continua e iniettiva con X compatto e Y di Hausdorff $\Rightarrow f$ immersione.*

Dim. $f(X) \subset Y$ di Hausdorff (T_2 ereditaria), $f|_{f(X)} : X \to f(X)$ continua e biiettiva quindi omeo per il Teorema. □

Def. Uno spazio X è *localmente compatto* se $\forall\, x \in X$, $\exists\, J \subset X$ intorno compatto di x in X.

N. B. In genere le proprietà locali sono espresse in termini di basi di intorni che hanno tali proprietà. Localmente compatto è un'eccezione: anziché una base d'intorni compatti si richiede l'esistenza di almeno un intorno compatto per ogni punto. Il motivo sarà chiaro tra poco.

Oss. Compatto $\Rightarrow$ loc. compatto.

Prop. *X compatto di Hausdorff $\Rightarrow X$ è T_3.*

Dim. X è T_1 in quanto T_2. $\forall\, Y \subset X$ chiuso $\Rightarrow Y$ compatto, $\forall\, x \in X - Y$, $\exists\, U, V \subset X$ aperti t.c. $x \in U$, $Y \subset V$, $U \cap V = \emptyset$. □

Cor. *X compatto di Hausdorff $\Rightarrow \forall\, x \in X$, $\exists\, \mathcal{J}_x$ base di intorni compatti di x in X.*

Dim. Ogni punto ammette base di intorni chiusi, quindi compatti (vedi caratterizzazione di T_3 mediante basi di intorni chiusi). □

Cor. *X localmente compatto di Hausdorff $\Rightarrow \forall\, x \in X$, $\exists\, \mathcal{J}_x$ base di intorni compatti di x in X.*

Dim. $\forall\, x \in X$, $\exists\, J \subset X$ intorno compatto di x in $X \Rightarrow \exists\, \mathcal{J}_x$ base di intorni compatti di x in J e quindi in X. $\square$

Cor. *X localmente compatto di Hausdorff $\Rightarrow X$ è T_3.*

Teor. *X localmente compatto di Hausdorff, $A \subset X$ chiuso, $Y \subset X$ compatto t.c. $A \cap Y = \emptyset \Rightarrow \exists\, U, V \subset X$ aperti t.c. $A \subset U$, $Y \subset V$ e $U \cap V = \emptyset$.*

Dim. $\forall\, y \in Y$, $\exists\, U_y, V_y \subset X$ aperti t.c. $A \subset U_y$, $y \in V_y$, $U_y \cap V_y = \emptyset \rightsquigarrow \{V_y \cap Y\}_{y \in Y}$ ricoprimento aperto di $Y \rightsquigarrow \{V_{y_1} \cap Y, \dots, V_{y_n} \cap Y\}$ sottoricoprimento finito

$$\rightsquigarrow \quad U = \bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i} \qquad V = \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}$$

aperti in X t.c. $A \subset U$, $Y \subset V$, $U \cap V = \emptyset$. $\square$

Cor. *X compatto di Hausdorff $\Rightarrow X$ è T_4.*

Dim. X è T_1 in quanto T_2. $\forall\, A, B \subset X$ chiusi t.c. $A \cap B = \emptyset \Rightarrow B$ compatto $\Rightarrow \exists\, U, V \subset X$ aperti t.c. $A \subset U$, $B \subset V$ e $U \cap V = \emptyset$. $\square$