Lezione 19 ottobre 2023

giovedì 19 ottobre 2023 11:12

Lezione di mercoledì 25 ottobre sospesa
Forse tutorato.

* * *

Def.: Data $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, la sua TRASPOSTA è ${}^tA \in M_{n,m}(\mathbb{K})$ ottenuta scambiando le righe con le colonne:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$${}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ovvero: $({}^tA)_{ij} := (A)_{ji}$

Prop.: $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{K})$. Allora:

1. ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$
2. ${}^t({}^tA) = A$

Dim.: 1. $({}^t(\underline{A+B}))_{ij} = (A+B)_{ji} = (A)_{ji} + (B)_{ji}$ $\Big) =$

$({}^tA + {}^tB)_{ij} = ({}^tA)_{ij} + ({}^tB)_{ij} = (A)_{ji} + (B)_{ji}$

2. esercizio.

Def.: Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$ $n \times n$, matrice quadrata

- La DIAGONALE PRINCIPALE di A è formata dagli elementi a_{ii} con $i = 1, \dots, n$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- A è una MATRICE DIAGONALE se

$$(A)_{ij} = 0 \quad \forall \; i \neq j$$

(è nulla FUORI DALLA DIAGONALE)

ATTENZIONE: La matrice nulla O è una matrice diagonale.

es. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- A è **SIMMETRICA** se è simmetrica rispetto alla diagonale principale, ovvero $(A)_{ij} = (A)_{ji}$, ovvero $\boxed{{}^tA = A}$ $\forall\ i,j$

es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

- A è **TRIANGOLARE SUPERIORE** se è del tipo:

$A = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}$, ovvero $\boxed{\begin{array}{l} (A)_{ij} = 0 \\ \text{se } i > j \end{array}}$

- La **MATRICE UNITÀ** $I_n \in M_n(K)$ che ha le entrate sulla diagonale principale $= 1$, e zero altrimenti (è una matrice diagonale, con 1 sulla diagonale).

$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ovvero, usando il **SIMBOLO DI KRONECKER**

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

$$\boxed{(I_n)_{ij} = \delta_{ij}}$$

* * *

PRODOTTO RIGA × COLONNA

Def.: Siano $A = (a_{11}\ \ a_{12} \cdots a_{1n}) \in M_{1,n}(\mathbb{K})$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{K})$$

Il PRODOTTO RIGA PER COLONNA è lo scalare

$$A \cdot B := a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + \cdots + a_{1n} \cdot b_{n1} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \cdot b_{j1} \in \mathbb{K}$$

Def: Date $A \in M_{m,\enclose{circle}{n}}(\mathbb{K})$ e $B \in M_{\enclose{circle}{n},p}(\mathbb{K})$

$$(A \cdot B)_{ij} := \underset{\substack{\downarrow \\ \text{riga } i}}{A_{(i)}} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ \text{colonna } j}}{B^{(j)}} = (a_{i1}\ \ a_{i2} \cdots a_{in}) \cdot \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

$$\underset{m \times \enclose{circle}{n}}{A} \cdot \underset{\enclose{circle}{n} \times p}{B} \in M_{m,p}(\mathbb{K})$$

Esempio: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R})$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \in M_{3,2}(\mathbb{R})$$

$$\underset{2\times 3}{A}\cdot\underset{3\times 2}{B} \in M_2(\mathbb{R})$$

$$\begin{array}{cc} & B^{(1)}\begin{pmatrix}1 & 7\\ -1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix} \\ A_{(1)}\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 3\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1 & 15\\ 1 & 12\end{pmatrix} \longrightarrow A_{(1)}\cdot B^{(2)}\end{array}$$

$$\underbrace{\underset{3\times 2}{B}\cdot\underset{2\times 3}{A}}_{3\times 3}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 3\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}1 & 7\\ -1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1 & -7 & 23\\ -1 & 0 & -2\\ 0 & -4 & 12\end{pmatrix}\end{array}$$

OSS.: In generale non ha senso chiedersi se $A\cdot B \overset{?}{=} B\cdot A$

Questa domanda ha senso se

$$\underset{n\times n}{A},\ \underset{n\times n}{B} \in M_n(K)$$

$$A\cdot B \in M_n(K)$$
$$B\cdot A \in M_n(K)$$

In questo caso, in generale si ha $A\cdot B \neq B\cdot A$

Es.: $A = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}$

$$A\cdot B = \begin{pmatrix}1 & 5\\ 1 & 2\end{pmatrix} \neq B\cdot A = \begin{pmatrix}3 & 1\\ 3 & 0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ il prodotto riga × colonna NON È COMMUTATIVO

PROP. ALGEBRICHE di $\cdot$:

$A, B \in M_{m,n}(K)$, $C, D \in M_{n,p}(K)$

e sia $c \in K$

Allora:

① $\underbrace{\underbrace{(A+B)}_{m\times n}\cdot\underbrace{C}_{n\times p}}_{m\times p} = \underbrace{\underset{m\times n}{A}\cdot\underset{n\times p}{C}}_{m\times p} + \underbrace{B\cdot C}_{m\times p}$

② $\underbrace{\underset{m\times n}{A}\cdot\underbrace{(C+D)}_{n\times p}}_{m\times p} = \underbrace{\underset{m\times n}{A}\cdot\underset{n\times p}{C}}_{m\times p} + \underbrace{\underset{m\times n}{A}\cdot\underset{n\times p}{D}}_{m\times p}$

③ $A\cdot(c\cdot C) = (c\cdot A)\cdot C = c\cdot(A\cdot C)$

④ $\underbrace{\underset{m\times \textcircled{n}}{A}\cdot\underset{\textcircled{n}\times n}{I_n}}_{m\times n} = A$

es :

$$\begin{array}{cc}
 & \overset{3\times 3}{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}} \\
\underset{2\times 3}{\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{pmatrix}} & \underset{2\times 3}{\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{pmatrix}} = A
\end{array}$$

$\underbrace{\underset{m\times \textcircled{m}}{I_m}\cdot\underset{\textcircled{m}\times n}{A}}_{m\times n} = A$

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{pmatrix}
\end{array}$$

IN PARTICOLARE : se $A\in M_n(K)$ è quadrata, si ha

$A\cdot I_n = I_n\cdot A = A$

⑤ $\underbrace{\underbrace{(A\cdot B)}_{m\times p}\cdot\underset{p\times q}{C}}_{m\times q} = \underbrace{\underset{m\times n}{A}\cdot\underbrace{(\underset{n\times p}{B}\cdot\underset{p\times q}{C})}_{n\times q}}_{m\times q}$

$A\in M_{m,n}(K),\ B\in M_{n,p}(K),\ C\in M_{p,q}(K)$

Infatti:

$$((A\cdot B)\cdot C)_{ij} = \underbrace{(A\cdot B)_{(i)}}_{\substack{M \\ m\times p}} \cdot \underset{p\times q}{C^{(j)}}$$

$$= \sum_{k=1}^{p} m_{ik}\, c_{kj}$$

$$m_{ik} = (A\cdot B)_{ik} = A_{(i)}\cdot B^{(k)}$$

$$= \sum_{l=1}^{n} a_{il}\cdot b_{lk}$$

$$= \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{l=1}^{n} a_{il}\cdot b_{lk}\right)\cdot c_{kj} = \sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{n}(a_{il}\cdot b_{lk}\cdot c_{kj})$$

Vediamo il membro destro:

$$(A\cdot(B\cdot C))_{ij} = A_{(i)}\cdot \underbrace{(B\cdot C)}_{N}{}^{(j)}$$

$$= \sum_{s=1}^{n} a_{is}\cdot n_{sj}$$

$$n_{sj} = B_{(s)}\cdot C^{(j)} = \sum_{t=1}^{p} b_{st}\cdot c_{tj}$$

$$= \sum_{s=1}^{n} a_{is}\cdot\left(\sum_{t=1}^{p} b_{st}\cdot c_{tj}\right) = \sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{p} a_{is}\, b_{st}\, c_{tj}$$

$$= \sum_{t=1}^{p}\sum_{s=1}^{n} a_{is}\, b_{st}\, c_{tj}$$

⑥ Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$

$B \in M_{n,p}(\mathbb{K})$

$$\underbrace{{}^{t}(\underset{m\times p}{A\cdot B})}_{p\times m} = \underbrace{\underset{p\times n}{{}^{t}B}\cdot \underset{n\times m}{{}^{t}A}}_{p\times m}$$

Infatti: $({}^t(A\cdot B))_{ij} = (A\cdot B)_{ji} = A_{(j)} \cdot B^{(i)}$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{jk}\, b_{ki}$$

$$({}^tB \cdot {}^tA)_{ij} = ({}^tB)_{(i)} \cdot ({}^tA)^{(j)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} ({}^tB)_{ik} \cdot ({}^tA)_{kj}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} b_{ki} \cdot a_{jk}$$

* * *

MATRICE INVÈRSA:

Def.: Una matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ quadrata si dice INVERTIBILE se $\exists\, M \in M_n(\mathbb{K})$ tale che

$$A\cdot M = M\cdot A = I_n$$

PROP.: $A \in M_n(\mathbb{K})$

① se A è invertibile, $\exists!\, M$ che verifica (*)

M si dirà MATRICE INVERSA di A

e si indicherà con $M =: A^{-1}$

② se A è invertibile e N è una matrice t.c. $A\cdot N = I_n$

$\Rightarrow N\cdot A = I_n$ (quindi $N = A^{-1}$)

③ se $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ invertibili

$\Longrightarrow$ $A\cdot B$ è invertibile, e l'inversa è

$$(A\cdot B)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1}$$

Infatti:

$$(A\cdot B)\cdot(B^{-1}\cdot A^{-1}) \underset{\substack{\downarrow\\ \text{Assoc.}}}{=} A\cdot\underbrace{(B\cdot B^{-1})}_{=\mathbb{I}_n}\cdot A^{-1}$$

$$= (A\cdot\mathbb{I}_n)\cdot A^{-1}$$

$$= A\cdot A^{-1} = \mathbb{I}_n$$

$$(B^{-1}\cdot A^{-1})\cdot(A\cdot B) = B^{-1}\cdot\underbrace{(A^{-1}\cdot A)}_{\mathbb{I}_n}\cdot B$$

$$= (B^{-1}\cdot\mathbb{I}_n)\cdot B$$

$$= B^{-1}\cdot B = \mathbb{I}_n$$

DOMANDA: è vero che se $A \neq O$, allora A è invertibile? NO!

es. $A = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$

$\exists ?\ M = \begin{pmatrix}m_{11} & m_{12}\\ m_{21} & m_{22}\end{pmatrix}$ t.c. $A\cdot M = M\cdot A = \mathbb{I}_2$?

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix}m_{11} & m_{12}\\ m_{21} & m_{22}\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}m_{11}+m_{21} & m_{12}+m_{22}\\ m_{11}+m_{21} & m_{12}+m_{22}\end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\end{array}$$

$$\begin{cases} m_{11}+m_{21} = 1\\ m_{12}+m_{22} = 0\\ m_{11}+m_{21} = 0\\ m_{12}+m_{22} = 1\end{cases}$$

è un sistema IMPOSSIBILE

(non ha nessuna soluzione)

$\Longrightarrow$ $\nexists$ (non esiste) M t.c. $A\cdot M = \mathbb{I}_2$.