Lezione 20 ottobre 2023
Lezione di ottobre 2023

Abbiamo bisogno di sapere:

Prop ① Se $A \in M_n(K)$ è invertibile, allora $\exists!$ matrice $H \in M_n(K)$ tale che $A \cdot H = H \cdot A = I_n$

Dim: Per assurdo, sia $H \in M_n(K)$ t.c.

$A \cdot H = H \cdot A = I_n$

$H = H \cdot I_n = H \cdot (A \cdot H) = (H \cdot A) \cdot H$

$= I_n \cdot H = H$

Prop ②: A invertibile, e sia $P \in M_n(K)$ una matrice t.c.

$A \cdot P = I_n$

$\Rightarrow P = A^{-1}$

Dim: Basta dimostrare che $P \cdot A = I_n$

Con $P \cdot A = I_n \cdot P \cdot A = (A^{-1} \cdot A) \cdot P \cdot A$

$= A^{-1} \cdot (A \cdot P) \cdot A = A^{-1} \cdot I_n \cdot A$

$= A^{-1} \cdot A = I_n$

OSS: Analogamente si può dimostrare che se A è invertibile e P è t.c.

$P \cdot A = I_n$

$\Rightarrow P = A^{-1}$

Dim: esercizio

Def: Poniamo

$GL(n, K) :=$ insieme delle matrici $n \times n$ invertibili

Allora $(GL(n,K), \cdot)$ dove $\cdot$ = prodotto $R \times C$ è un GRUPPO, con neutro I_n.

Non è commutativo (non è abeliano)
Si chiama
GRUPPO LINEARE GENERALE.

Esercizio: $GL(n, K) \notin M_n(K)$ non è chiuso rispetto alla somma $\Rightarrow GL(n, K)$ non è SSV.

$I_n \in GL(n, K)$

$(I_n)^{-1} = I_n$

$I_n \cdot I_n = I_n$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = J_n$ esercizio: $I_n + J_n$ non è invertibile

oppure: $-I_n = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & -1 \end{pmatrix}$

$(-I_n) \cdot (-I_n) = (-1) \cdot I_n \cdot (-1) \cdot I_n$

$= (-1)^2 \cdot I_n \cdot I_n = I_n$

$I_n + (-I_n) = O$ matrice nulla

$\underbrace{O \cdot M}_{=O} = M \cdot O = I_n$, ma $O \neq I_n$

OSS: $O \cdot M = O$, $\forall M \in M_n(K)$

$\begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1n} \\ m_{n1} & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ la matrice O non è mai invertibile.

CURIOSITÀ dell' $\cdot$ $R \times C$:

- è possibile che accada che $A \cdot B = O$ con $A \neq O$, $B \neq O$

es. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Non succede se $A \in GL(n, K)$ oppure $B \in GL(n, K)$

Infatti $A \cdot B = O$

$\exists A^{-1}$: $A^{-1} \cdot (A \cdot B) = A^{-1} \cdot O$

$\underbrace{(A^{-1} \cdot A)}_{I_n} \cdot B = O$

$B = O$

- è possibile avere $A \neq O$, $A \in M_n(K)$, tale che

$A^2 := A \cdot A = O$

es. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

in generale $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
$a \in K$

Def: $A \in M_n(K)$, $k \in \mathbb{N}$, $A^k := \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{k \text{ volte}}$

$A^0 := I_n$ PER CONVENZIONE

Def: Se $A \in M_n(K)$ t.c. $\exists k \in \mathbb{N}$ per cui $A^k = O$ allora A si dice NILPOTENTE.

Def: Se $A \in GL(n, K)$, $k \in \mathbb{N}$

$A^{-k} := (A^{-1})^k = \underbrace{A^{-1} \cdot A^{-1} \cdots A^{-1}}_{k \text{ volte}}$

Esercizio:

Con matrici $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$

t.c. $X^2 = I_2$ $\in M_2(\mathbb{R})$ sono INFINITE

$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x_{11}^2 + x_{12}x_{21} & x_{11}x_{12} + x_{12}x_{22} \\ x_{21}x_{11} + x_{22}x_{21} & x_{21}x_{12} + x_{22}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} x_{11}^2 + x_{12}x_{21} = 1 \\ x_{11}(x_{12} + x_{22}) = 0 \\ x_{21}(x_{11} + x_{22}) = 0 \\ x_{21}x_{12} + x_{22}^2 = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x_{11}^2 + x_{12}x_{21} = 1 \\ x_{12} + x_{22} = 0 \\ x_{21} + x_{22} = 0 \\ x_{21}x_{12} + x_{22}^2 = 1 \end{cases}$

$x_{22} = -x_{12}$

$\begin{cases} x_{11}^2 + x_{12}x_{21} = 1 \\ x_{12} + x_{22} = 0 \\ x_{21} + x_{22} = 0 \\ x_{21}x_{12} + x_{22}^2 = 1 \end{cases}$

$\forall x_{12}$ fissato, $x_{22} = -x_{12}$
$x_{21} = x_{22} \in \mathbb{Z}$,

se $a = \pm 1$, tutte matrici del tipo $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $b, c \in \mathbb{R}$

$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

se $a \neq \pm 1$, allora $x_{12} \cdot x_{21} \neq 0$

pongo $x_{12} = d$, trovo le matrici del tipo

$\begin{pmatrix} a & d \\ \frac{1-a^2}{d} & -a \end{pmatrix}$ $a, d \in \mathbb{R}$, $a \neq \pm 1$, $d \neq 0$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

OSS: Se $P \in M_n(K)$ è t.c.

$P \cdot P = I_2 \Rightarrow P$ è invertibile e $P^{-1} = P$

Infatti: pongo $H = P$

$P \cdot H = H \cdot P = I_2$

SISTEMI LINEARI (SL)

Siano $n, m \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n$, per K

Def: Si chiama i-m equazione lineare in n incognite a coefficienti in K = somma finita di n a_i delle forme:

$$(*) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

dove $a_{ij} \in K$, $b_i \in K$
COEFFICIENTI TERMINI NOTI
$x_1, \ldots, x_n$ INCOGNITE

Es: $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$

Def: Una SOLUZIONE del SL $(*)$ è una n-upla $s = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$ con $s_i \in K$
$s \in K^n$

t.c. se sostituiamo s_i a x_i in $(*)$, allora tutte le eq. sono soddisfatte.

Def: Il SL $(*)$ si dice OMOGENEO se $b_i = 0$ $\forall i = 1, \ldots, m$; SLO

Altrimenti, il SL si dice NON OMOGENEO.

Def: Il SL $(*)$ si dice COMPATIBILE se ammette almeno una soluzione

Altrimenti: INCOMPATIBILE = IMPOSSIBILE.

Es: ① $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases}$ è incompatibile

② $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$

la s: soluzione $s = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in K^2$

③ $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 1 \\ 4x_1 + 6x_2 = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 1 \\ 2(2x_1 + 3x_2) = 2 \end{cases}$

la stessa soluzione. $s = \begin{pmatrix} \frac{1-3t}{2} \\ t \end{pmatrix}$ al variare $t \in K$

Con:

$$(*) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

e definisco $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m \times n}(K)$

MATRICE DEI COEFFICIENTI

definisco $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in M_{m \times 1}(K)$

definisco $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ matrice delle incognite

Con questi scelti:

$\underbrace{A}_{m \times n} \cdot \underbrace{X}_{n \times 1} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{m \times 1} = b$

$\boxed{A \cdot X = b}$