Lezione 18 ottobre 2023

mercoledì 18 ottobre 2023 11:10

Obiettivo: Studiare geometria "lineare" negli spazi vettoriali di dimensione finita.

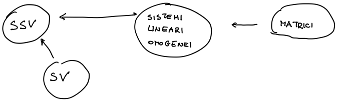
IDEA:

$V \supseteq$ rette, piani, iperpiani, ... ⇝ equazioni lineari

Se in V fisso $\mathcal{B}$ base finita

$$F_{\mathcal{B}} : V \to K^n$$

$v \mapsto$ coordinate di v nella base $\mathcal{B}$



MATRICI

Def.: Siano m, n numeri $\in \mathbb{N}$, $m, n \geq 1$, e sia K un campo.

Una **MATRICE** di tipo $m \times n$ a **COEFFICIENTI in K** è una tabella rettangolare di elementi di K del tipo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

dove $a_{ij} \in K$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$

Notazione: $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$

Def: $\forall\, i = 1, \dots, m$, la RIGA i-esima di A è la sottomatrice di tipo $1 \times n$

$$A_{(i)} = (a_{i1}\ a_{i2} \cdots a_{in})$$

$\forall\ j = 1, \dots, n$, la COLONNA j-ESIMA DI A è la sottomatrice di tipo $m \times 1$

$$A^{(j)} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

Def: l'elemento a_{ij} si chiama ELEM. di posto i,j, opp. COEFF. di posto i,j, opp. ENTRATA di posto i,j.

altra notazione $a_{ij} = (A)_{ij}$

Def. Se $m = n$, una matrice A si dice QUADRATA

Def.: $M_{m,n}(\mathbb{K}) := \{$matrici $m \times n$, entrate in $\mathbb{K}\}$

$M_n(\mathbb{K}) := \{$matrici $n \times n$, entrate in $\mathbb{K}\}$

Esempi: • $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & \pi & -1 \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R})$

2×3

$A_{(1)} = (1 \quad 2 \quad 3)$

$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ \pi \end{pmatrix}$

$a_{13} = 3$

- $A = (a_{11}) \in M_1(\mathbb{K})$
- $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K})$

In $M_{m,n}(\mathbb{K})$ vogliamo ora def. 2 operazioni: $+$ e $\cdot$ molt. per scalare:

Def: Siano $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{K})$

$A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$, $B = (b_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$

$$(A+B)_{ij} := a_{ij} \underset{\substack{\downarrow \\ \mathbb{K}}}{+} b_{ij}$$

$$A+B \in M_{m,n}(\mathbb{K})$$

Sia ora $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, sia $c \in \mathbb{K}$

$$(c \cdot A)_{ij} := c \cdot a_{ij} \qquad \forall\, i : 1 \le i \le m \quad \forall\, j : 1 \le j \le n$$

$$c \cdot A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$$

Esempio : $M_{2,3}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & \pi & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -8 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 7 \\ -8 & \pi+1 & 0 \end{pmatrix}$$

$c = 2$, $\quad 2 \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2\pi & -2 \end{pmatrix}$

Domanda: $M_{m,n}(\mathbb{K})$ con $+$ e $\cdot$ per scalari

è SV su $\mathbb{K}$?

(V1) , .., (V4) : $(M_{m,n}(\mathbb{K}), +)$ è un gruppo abeliano?

(V1) $\quad (A+B)+C \overset{?}{=} A + (B+C)$

$$((A+B)+C)_{ij} = (A+B)_{ij} + (C)_{ij}$$

$$= ((A)_{ij} + (B)_{ij}) + (C)_{ij}$$

in $\mathbb{K}$

la + in $\mathbb{K}$ è associativa →

$$= (A)_{ij} + ((B)_{ij} + (C)_{ij})$$

$$\overset{!}{=} (A)_{ij} + ((B+C)_{ij})$$

V2 : Neutro per + : $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

V3 Sia $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$

opposto in $\mathbb{K}$

$$-A = (-1) \cdot A = \left(\boxed{-a_{ij}} \right)_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$$

V4 commutatività: $A+B = B+A$

V5 $c \cdot (A+B) = c \cdot A + c \cdot B$

V6 $(c+d) \cdot A = c \cdot A + d \cdot A$

V7 $(c \cdot d) \cdot A = c \cdot (d \cdot A)$

V8 $1 \cdot A = A$

$\Rightarrow M_{m,n}(\mathbb{K})$ è SV su $\mathbb{K}$

Generatori per $M_{m,n}(\mathbb{K})$?

Es: $M_2(\mathbb{R})$: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, un insieme di generatori è

Cons. $\left\{ E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$a_{11} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$a_{12} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$a_{21} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix} +$$

$$a_{22} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff a_{ij} = 0 \quad \forall i = 1,2 \quad \forall j = 1,2$$

In generale: dei generatori per $M_{m,n}(\mathbb{K})$ è $\{ E_{ij} : 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n \}$

dove $(E_{ij})_{lk} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = l \text{ e } j = k \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Domanda: $\{ E_{ij} \}_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$ sono linearm. indipendenti? sì

Es.: $M_2(\mathbb{K})$

$$c_1 \cdot E_{11} + c_2 \cdot E_{12} + c_3 \cdot E_{21} + c_4 \cdot E_{22} = 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & c_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c_3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff c_i = 0 \quad \forall i = 1, .., 4$$

In generale: $\underbrace{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} E_{ij}}_{} = 0$

$c_{ij} \in \mathbb{K}$ è la matrice

$$(c_{ij})_{\substack{i=1..m \\ j=1..n}} = 0$$

$\iff c_{ij} = 0.$

Def.: $\{ E_{ij} \}_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$ si chiama BASE CANONICA

Oss.: I vettori di $\mathbb{K}^n = \left\{ \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \mid c_i \in \mathbb{K} \right\}$

possono essere cons. come particolari matrici

di tipo n × 1

$$\mathbb{K}^n = M_{n,1}(\mathbb{K})$$

e anche le operazioni + e · per scalare

coincidono.