SISTEMI BONUS-MALUS (BM) IN ASSICURAZIONI RCA

Gli assicurati di ogni classe tariffaria sono ripartiti in **classi di merito** o **classi BM**. Il premio annuo per un rischio dipende dalla classe tariffaria e dalla classe di merito che gli sono assegnate.

Tipicamente, la classe di merito in un dato anno, t, è determinata dalla **classe di merito** c_{t-1} e dal **numero di sinistri causati dall'assicurato** nell'anno precedente n_{t-1}: $(c_{t-1}, n_{t-1}) \rightarrow c_t$.

Si tiene conto solo del numero di sinistri e non anche dei loro importi. Sistemi Bonus-Malus basati anche sugli importi di danno non sono generalmente usati

- per motivi di semplicità,
- perché, mentre il numero di sinistri avvenuti in un anno è usualmente noto, la valutazione degli importi di risarcimento può richiedere anche molti anni,
- perché si assume che le caratteristiche non osservabili influiscano più sul numero dei sinistri che sulla loro entità, in quanto il comportamento dell'assicurato può influire sul numero di sinistri, in misura inferiore sui loro costi.

Osservazione. Ci sono sistemi nei quali non si ha $(c_{t-1}, n_{t-1}) \rightarrow c_t$: per determinare la classe nell'anno t non si tiene conto solo dell'informazione relativa alla classe occupata nell'anno $t-1$, ma anche in alcuni anni precedenti. Spesso, in tali sistemi, si possono introdurre classi ausiliarie e l'evoluzione può essere ancora descritta da $(c_{t-1}, n_{t-1}) \rightarrow c_t$.

Inoltre, in pratica, non tutti i sinistri sono "penalizzanti".

Nel seguito supponiamo che sussistano le $(c_{t-1}, n_{t-1}) \rightarrow c_t$.

Per assegnare un sistema BM, si devono assegnare

- le **classi di merito**, siano $1, \dots, J$,
- le **regole di ingresso**: la classe iniziale per i nuovi assicurati e la classe da assegnare ad un assicurato proveniente da un'altra tariffa,
- le **regole di transizione** o **regole evolutive**, che determinano la classe di arrivo, noti la classe di provenienza e il numero di sinistri nell'anno precedente, $(c_{t-1}, n_{t-1}) \to c_t$,
- la **scala dei coefficienti di premio**, sia $\pi_1 \leq \cdots \leq \pi_J$.

Nei sistemi BM il premio nell'anno t, per un assicurato in classe tariffaria k e in classe BM j è dato da una formula moltiplicativa

$$P_{t,k,j}^{BM} = P_{t,k} \gamma_k \pi_j,$$

dove

- $P_{t,k}$ è un **premio base** per la classe tariffaria k, nell'anno t, usualmente $P_{t,k} = P_t$,
- γ_k è una "relatività" legata alla classe tariffaria k (ottenuta con la personalizzazione a priori),
- π_j è il coefficiente della scala per la classe BM j.

Il fattore $P_{t,k}\gamma_k$ $(= P_t\gamma_k)$ è detto **premio di riferimento** per la classe tariffaria k, nell'anno t.

Dalla

$$P_{t,k,j}^{BM} = P_{t,k}\gamma_k\pi_j,$$

i coefficienti della scala BM determinano la riduzione o l'incremento del premio, rispetto al premio di riferimento della classe tariffaria k,

- se $\pi_j < 1$, allora $P_{t,k,j}^{BM} < P_{t,k}\gamma_k$: gli assicurati ricevono uno sconto rispetto al premio di riferimento, j è una **classe di bonus**,

- se $\pi_j > 1$, allora $P_{t,k,j}^{BM} > P_{t,k}\gamma_k$: gli assicurati pagano un premio maggiore rispetto al premio di riferimento, j è una **classe di malus**.

In alcuni sistemi c'è una classe BM, sia h, tale che $\pi_h = 1$, tale classe è detta classe BM di riferimento, si ha $P_{t,k,h}^{BM} = P_{t,k}\gamma_k$: il premio è uguale al premio di riferimento della classe tariffaria.

Esempio. Sistema “italiano”: in vigore in Italia prima della liberalizzazione tariffaria 1/7/1994

Classe BM	Numero di sinistri					Scala BM
j	0	1	2	3	4 o >4	π_j
1	1	3	6	9	12	0.50
2	1	4	7	10	13	0.53
3	2	5	8	11	14	0.56
4	3	6	9	12	15	0.59
5	4	7	10	13	16	0.62
6	5	8	11	14	17	0.66
7	6	9	12	15	18	0.70
8	7	10	13	16	18	0.74
9	8	11	14	17	18	0.78
10	9	12	15	18	18	0.82
11	10	13	16	18	18	0.88
12	11	14	17	18	18	0.94
13	12	15	18	18	18	1.00
14	13	16	18	18	18	1.15
15	14	17	18	18	18	1.30
16	15	18	18	18	18	1.50
17	16	18	18	18	18	1.75
18	17	18	18	18	18	2.00

Classe di ingresso per i nuovi assicurati 14.

Un assicurato che riporti, in media, un sinistro ogni 3 anni, rimane nella stessa “zona” del sistema, assicurati con frequenze sinistri <1/3 tendono a spostarsi nelle classi di bonus, assicurati con frequenze sinistri >1/3 tendono a spostarsi nelle classi di malus.

In presenza di un sistema BM ci sono diversi aspetti importanti da considerare:

- la **capacità del sistema di differenziare adeguatamente i premi** in modo che gli assicurati virtuosi paghino premi inferiori rispetto ai non virtuosi,
- l'effetto di **personalizzazione/solidarietà** che è introdotto dal sistema,
- l'effetto di **autoliquidazione** dei sinistri (***hunger for bonus***): un assicurato può decidere di pagare per proprio conto un sinistro per non incorrere negli aggravi di premio previsti dal sistema: tale effetto dipende, in particolare, dalla "severità" del sistema,
- la **stabilità finanziaria del sistema**: se il sistema non è adeguatamente severo, rispetto alla sinistrosità degli assicurati, in tempi brevi la maggior parte degli assicurati si sposterà nelle classi più basse e allora il totale dei premi potrebbe essere insufficiente per coprire il risarcimento totale atteso. Per riportare in equilibrio tecnico il portafoglio è necessario aumentare il premio di riferimento.

Altri aspetti interessanti sono,

- confrontare sistemi,
- come assegnare le regole evolutive e la scala dei coefficienti di premio.

Alcuni elementi per la valutazione di un sistema BM

Consideriamo dapprima una collettività di assicurati omogenei rispetto a caratteristiche osservabili *a priori* ed “indipendenti”: una classe tariffaria. Omettiamo l’indice della classe. Supponiamo che il sistema BM sia assegnato. Indichiamo con

P_t il premio di riferimento nell’anno t.

Consideriamo un fissato assicurato nella classe tariffaria e indichiamo con

N_t il numero di sinistri nell’anno t,

$X_t = \sum_{h=1}^{N_t} Y_{th}$ il risarcimento totale nell’anno t,

C_t la classe BM nell’anno t.

Ipotizziamo

- indipendenza stocastica del processo $\{N_t, t = 1,2,\dots\}$ dal processo degli importi di risarcimento, nel senso che $(N_{T+1}|N_1 = n_1, \dots, N_T = n_T) =^d (N_{T+1}|N_1 = n_1, \dots, N_T = n_T, H_T)$, per ogni $H_T = \bigwedge_{\substack{t=1,\dots,T \\ h=1,\dots,n_t}} (Y_{th} \in A_{th})$, con $A_{th} \subset \mathbb{R}$, per ogni T,
- X_t abbia distribuzione composta con $E(X_t) = E(N_t)E(Y_t)$,
- i processi dei diversi assicurati siano iid.

Poiché C_t è funzione di C_1 e $N_1, \dots, N_{t-1}$, la legge del processo $\{C_t, t = 1,2, \dots\}$ dipende dalla legge del processo $\{C_1, N_1, N_2, \dots\}$ e dalle regole evolutive del sistema.

Per la valutazione di un sistema, consideriamo i seguenti elementi.

- **Distribuzione di probabilità di $\boldsymbol{C_t}$**:

$$Pr(C_t = j), \ \ j = 1, \dots, J.$$

Tale distribuzione è comune ai rischi della collettività. La sua evoluzione al variare di t permette di valutare l'evoluzione nel tempo degli assicurati tra le classi BM, per effetto delle regole evolutive in relazione alla sinistrosità.

- **Coefficiente medio di premio**:

$$b_t = \sum_{j=1}^{J} \pi_j Pr(C_t = j).$$

E' il premio atteso nell'anno t se il premio di riferimento è unitario. Dipende dalla distribuzione di C_t e dalla scala dei coefficienti di premio $\pi_j, \ j = 1, \dots, J$.

Se gli assicurati tendono a portarsi nelle classi più basse, b_t è decrescente al crescere di t. Descriviamo gli effetti di tale situazione.

Nell'anno $t = 1$ si fissi il premio di riferimento P_1 pari al **premio di equilibrio** $P_1^{(e)}$, cioè al premio che realizza l'**equilibrio tecnico**, in termini attesi, tra premi e risarcimenti,

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{J} P_1^{(e)} \pi_j Pr(C_1 = j)}_{\substack{\uparrow \\ \text{premio atteso} \\ P_1^{(e)} b_1}} = \underbrace{E(X_1)}_{\substack{\uparrow \\ \text{risarcimento atteso}}}$$

Assumiamo che le distribuzioni di N_t, X_t siano invarianti al variare di t (stazionarietà).

Se nell'anno t si fissa il premio di riferimento $P_t = P_1 = P_1^{(e)}$, si ha equilibrio tecnico solo se $b_t = b_1$.

Se invece il coefficiente medio di premio ha un andamento decrescente nel tempo, mantenendo fisso il premio di riferimento si ha insufficienza dei premi

$$P_1^{(e)} b_t < P_1^{(e)} b_1 = E(X_1) = E(X_t),$$

nonostante non ci sia un peggioramento della sinistrosità. Per riportare equilibrio, è necessario incrementare il premio di riferimento: $P_t > P_1$.

Ciò ha effetto sulla capacità del sistema di premiare gli assicurati concedendo gli sconti previsti.

Esempio. All'epoca 1,

- assicurato (a) in classe BM h, premio $P_1\pi_h$,
- assicurato (b) in classe BM j, premio $P_1\pi_j$.

Sia $j < h$. L'assicurato (b) riceve uno sconto di premio, rispetto ad (a), pari a

$$\frac{P_1\pi_h - P_1\pi_j}{P_1\pi_h} = 1 - \frac{\pi_j}{\pi_h}.$$

Se (a) si trova in classe BM j, nell'anno t, si attende di ricevere tale sconto rispetto al premio in 1. Ma se il premio di riferimento P_t è aumentato rispetto al premio di riferimento in 1, lo sconto effettivo è

$$1 - \frac{P_t\pi_j}{P_1\pi_h} < 1 - \frac{\pi_j}{\pi_h}.$$

Nel sistema "italiano", se $h = 14$, $\pi_h = 1.15$. Dopo 5 anni senza sinistri l'assicurato passa in classe $j = 9$ con $\pi_j = 0.78$. Lo sconto atteso sul premio è 1-0.78/1.15≅0.32. Se però, ad esempio, $P_6 = 1.15P_1$, lo sconto effettivo è 1-0.78≅0.22.

- **Premio di equilibrio**:

$$\sum_{j=1}^{J} P_t^{(e)} \pi_j Pr(C_t = j) = E(X_t)$$

E' il valore del premio di riferimento in t che consente di avere equilibrio tecnico, in termini attesi, tra premi e risarcimenti nell'anno t.

E' un importante indicatore per l'analisi dei sistemi BM che tiene conto: della distribuzione degli assicurati tra le classi di merito, dei coefficienti di premio, del risarcimento atteso.

L'analisi dell'evoluzione nel tempo dei premi di riferimento permette di valutare gli incrementi del premio di riferimento richiesti per mantenere la stabilità finanziaria del sistema.

Per potere calcolare i tre precedenti indicatori si deve introdurre una valutazione probabilistica per il processo $\{C_1, N_1, N_2, \dots\}$ e assegnare $E(Y_t)$.

Richiami. Catene markoviane finite (cenno)

Def. Un processo stocastico $\{C_1, C_2, \dots\}$, dove le determinazioni possibili di C_t sono in numero finito, siano $1, \dots, J$, le medesime per ogni $t = 1,2, \dots$, è detto **processo markoviano finito** se per ogni i, j e per ogni evento $K_{t-1} = (C_1 = i_1, \dots, C_{t-1} = i_{t-1})$,

$$Pr(C_{t+1} = j | C_t = i, K_{t-1}) = Pr(C_{t+1} = j | C_t = i).$$

Il processo markoviano è detto **omogeneo** o **catena markoviana** se, in aggiunta,

$$Pr(C_{t+1} = j | C_t = i) = p_{ij},$$

ovvero le precedenti probabilità non dipendono da t.

Le determinazioni $1, \dots, J$ sono dette **stati del sistema**. La

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & \dots & p_{1J} \\ \dots & & \dots \\ p_{J1} & \dots & p_{JJ} \end{bmatrix}$$

è una matrice stocastica: $p_{ij} \geq 0$, $\sum_{j=1}^{J} p_{ij} = 1$, per ogni i, detta **matrice delle probabilità condizionate di transizione**.

Posto $\boldsymbol{a}_t = \left(a_t(1), \dots, a_t(J)\right) = (Pr(C_t = 1), \dots, Pr(C_t = J))$, si ha

$$a_2(j) = Pr(C_2 = j) = \sum_{i=1}^{J} Pr(C_1 = i)\, Pr(C_2 = j | C_1 = i) = \underbrace{\sum_{i=1}^{J} a_1(i) p_{ij}}_{\substack{\text{elemento di posto } j \\ \text{del prodotto } \boldsymbol{a}_1 P}}.$$

Segue $$\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{a}_1 \boldsymbol{P}.$$

Analogamente,

$$a_3(j) = Pr(C_3 = j) = \sum_{i=1}^{J} Pr(C_2 = i)\, Pr(C_3 = j | C_2 = i) = \underbrace{\sum_{i=1}^{J} a_2(i) p_{ij}}_{\substack{\text{elemento di posto } j \\ \text{del prodotto } \boldsymbol{a}_2 P}}.$$

Segue $$\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{a}_2 \boldsymbol{P} = (\boldsymbol{a}_1 \boldsymbol{P}) \boldsymbol{P} = \boldsymbol{a}_1 \boldsymbol{P}^{(2)},$$

dove $\boldsymbol{P}^{(2)} = \boldsymbol{P} \times \boldsymbol{P}$.

Per induzione su t, si prova che

$$\boldsymbol{a}_t = \boldsymbol{a}_{t-1} \boldsymbol{P} = \boldsymbol{a}_1 \boldsymbol{P}^{(t-1)}.$$

Quindi, assegnate la distribuzione iniziale $\boldsymbol{a}_1$ e la matrice $\boldsymbol{P}$ sono assegnate le distribuzioni marginali unidimensionali.

Più in generale, assegnate la distribuzione iniziale $\boldsymbol{a}_1$ e la matrice $\boldsymbol{P}$ è assegnata la legge del processo. Si ha, applicando prima il teorema delle probabilità composte e poi l'ipotesi markoviana,

$$Pr(C_1 = i_1, \dots, C_t = i_t) = Pr(C_1 = i_1)\, Pr(C_2 = i_2 | C_1 = i_1)\, Pr(C_3 = i_3 | C_1 = i_1, C_2 = i_2) \times \cdots$$
$$\times\, Pr(C_t = i_t | C_1 = i_1, \dots, C_{t-1} = i_{t-1})$$

$$= \underset{a_1(i_1)}{Pr(C_1 = i_1)}\, \underset{p_{i_1 i_2}}{Pr(C_2 = i_2 | C_1 = i_1)}\, \underset{p_{i_2 i_3}}{Pr(C_3 = i_3 | C_2 = i_2)} \cdots \underset{p_{i_{t-1} i_t}}{Pr(C_t = i_t | C_{t-1} = i_{t-1})}$$

Dalle probabilità sui "segmenti iniziali", si ottengono le $Pr\left(C_{t_1} = i_1, \dots, C_{t_n} = i_n\right)$, per ogni $t_1 < \cdots < t_n$. Ad esempio,

$$(C_2 = i, C_4 = j) = (C_2 = i, C_4 = j) \wedge \Omega = (C_2 = i, C_4 = j) \wedge \bigvee_{i_1, i_3} (C_1 = i_1, C_3 = i_3)$$
$$= \bigvee_{i_1, i_3} (C_1 = i_1, C_2 = i, C_3 = i_3, C_4 = j)$$

Segue

$$Pr(C_2 = i, C_4 = j) = \sum_{i_1, i_3} Pr(C_1 = i_1, C_2 = i, C_3 = i_3, C_4 = j).$$

Gli elementi della potenza $\boldsymbol{P}^{(\tau)}$ della matrice delle probabilità condizionate di transizione, che indichiamo con $p_{ij}^{(\tau)}$, sono interpretabili come le probabilità di passare in τ passi (anni) dallo stato i allo stato j. Ad esempio,

$$Pr(C_{t+2}=j|C_t=i)=\sum_{h=1}^{J} Pr(C_{t+2}=j,C_{t+1}=h|C_t=i)$$

$$=\sum_{h=1}^{J} \underbrace{\underset{p_{ih}}{Pr(C_{t+1}=h|C_t=i)}\underset{p_{hj}\ (*)}{Pr(C_{t+2}=j|C_{t+1}=h,C_t=i)}}_{\text{elemento di posto } i,j \text{ della matrice } \boldsymbol{P}\times\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{(2)}}=p_{ij}^{(2)}$$

Per $(*)$, notiamo che

$$(C_{t+1}=h,C_t=i)=\vee_{i_1,\ldots,i_{t-1}}(C_{t+1}=h,C_t=i,C_1=i_1,\ldots,C_{t-1}=i_{t-1}).$$

Allora per la proprietà di disintegrabilità della probabilità si ha

$$Pr(C_{t+2}=j|C_{t+1}=h,C_t=i)=\sum_{i_1,\ldots,i_{t-1}} Pr(C_1=i_1,\ldots,C_{t-1}=i_{t-1}|C_{t+1}=h,C_t=i)\times$$

$$\times\underset{p_{hj}}{Pr(C_{t+2}=j|C_{t+1}=h,C_t=i,C_1=i_1,\ldots,C_{t-1}=i_{t-1})}$$

$$=p_{hj}\sum_{i_1,\ldots,i_{t-1}} Pr(C_1=i_1,\ldots,C_{t-1}=i_{t-1}|C_{t+1}=h,C_t=i)=p_{hj}.$$

Per induzione su τ, si prova che $\quad Pr(C_{t+\tau}=j|C_t=i)=p_{ij}^{(\tau)}$.

Def. Una catena markoviana è detta **regolare** se, esiste t_0 tale che, per ogni $t \geq t_0$, $p_{ij}^{(t)} > 0$, per ogni i, j.

Interpretazione: se il numero di passi t è sufficientemente elevato, è positiva la probabilità di raggiungere un qualunque stato del sistema, a partire da qualunque stato.

Teorema di Markov. In una catena markoviana regolare, per ogni i, j esiste

$$\lim_{t \to +\infty} p_{ij}^{(t)} = v_j > 0, \quad \text{non dipende da } i. \ (*)$$

Da $\sum_{j=1}^{J} p_{ij}^{(t)} = 1$, segue che $\sum_{j=1}^{J} v_j = 1$.

Dunque in una catena markoviana regolare la potenza $\boldsymbol{P}^{(t)}$ converge, al divergere di t, (limite elemento per elemento) ad una matrice stocastica, con elementi positivi e con righe tutte uguali

$$\boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} v_1 & \dots & v_J \\ \dots & & \dots \\ v_1 & \dots & v_J \end{bmatrix}$$

Si noti che la (*) è anche sufficiente perché la catena sia regolare.

Conseguenze.

- Il processo ammette una distribuzione asintotica, la $\boldsymbol{v} = (v_1, \dots, v_J)$, indipendente dalla distribuzione iniziale. Infatti, da $\boldsymbol{a}_t = \boldsymbol{a}_1 \boldsymbol{P}^{(t-1)}$, segue

$$\lim_{t \to +\infty} \boldsymbol{a}_t = \boldsymbol{a}_1 \lim_{t \to +\infty} \boldsymbol{P}^{(t-1)} = \boldsymbol{a}_1 \boldsymbol{V} = \boldsymbol{v}.$$

- La distribuzione asintotica soddisfa la

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}\boldsymbol{P}.$$

  Segue da

$$\begin{array}{ccccc} \boldsymbol{a}_t & = & \boldsymbol{a}_{t-1} & \boldsymbol{P}, & \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \qquad t \to +\infty \\ \boldsymbol{v} & & \boldsymbol{v} & \boldsymbol{P} & \end{array}$$

- Si può allora determinare la distribuzione asintotica risolvendo il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}\boldsymbol{P} \\ \sum_{j=1}^{J} v_j = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{P} - \boldsymbol{I}) = \boldsymbol{0} \\ \sum_{j=1}^{J} v_j = 1 \end{cases}$$

  Si noti che la matrice $\boldsymbol{P} - \boldsymbol{I}$ ha rango minore di J e dunque determinate nullo.

- Se $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{v}$, dalla $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}\boldsymbol{P}$, segue che $\boldsymbol{a}_t = \boldsymbol{v}$, per ogni t: stazionarietà ■

Introduciamo due modelli probabilistici per il processo $\{C_1, N_1, N_2, \dots\}$, per lo studio di sistemi BM.

Modello (a) Si assume che

- $N_1|C_1 = j, N_2|C_1 = j, \dots$ siano iid, per ogni $j = 1, \dots, J$,
- $Pr(N_t = n|C_1 = j) = p_n$, $n = 0,1, \dots$, indipendenti da j, assegnate,
- $Pr(C_1 = j)$, $j = 1, \dots, J$, assegnate.

Proposizione 1. Nelle ipotesi del Modello (a), si ha

$$Pr(N_t = n|K_t) = p_n,$$

per ogni n, per ogni t, per ogni $K_t = (C_1 = j_1, \dots, C_t = j_t)$, purché $K_t \neq \phi$.

Dim. Fissiamo n, t e $K_t = (C_1 = j_1, C_2 = j_2, \dots, C_t = j_t)$. Osserviamo che l'evento K_t è logicamente dipendente dal processo $\{C_1, N_1, N_2, \dots\}$:

$$K_t = (C_1 = j_1, C_2 = j_2, \dots, C_t = j_t) = \bigvee_{H_{t-1} \to K_t} H_{t-1},$$

dove $H_{t-1} = (C_1 = j_1, N_1 = n_1, \dots, N_{t-1} = n_{t-1})$ è una realizzazione iniziale del processo $\{C_1, N_1, N_2, \dots\}$ che, a partire dalla classe BM j_1 al tempo 1, conduce ad occupare le classi j_2 al tempo 2,… j_t al tempo t.

Ad esempio. Nel sistema “italiano”:

$(C_1 = 14, C_2 = 13) = (C_1 = 14, N_1 = 0)$

$(C_1 = 17, C_2 = 18) = (C_1 = 17, N_1 = 1) \vee (C_1 = 17, N_1 = 2) \vee \dots$

$(C_1 = 14, C_2 = 16, C_3 = 15\ ) = (C_1 = 14, N_1 = 1, N_2 = 0)$

Poiché gli eventi del tipo H_{t-1} sono a due a due incompatibili, per la proprietà di disintegrabilità

$$Pr(N_t = n|K_t) = \sum_{H_{t-1}\to K_t} Pr(H_{t-1}|K_t)\underbrace{Pr(N_t = n|H_{t-1})}$$

$$= Pr(N_t = n|C_1 = j_1, N_1 = n_1, \dots, N_{t-1} = n_{t-1})$$

$$= Pr(N_t = n|C_1 = j_1) \quad \text{per l'indip. condizionata}$$

$$= p_n \quad \text{per la seconda ipotesi}$$

$$= p_n \underbrace{\sum_{H_{t-1}\to K_t} Pr(H_{t-1}|K_t)}_{Pr(K_t|K_t) = 1} = p_n$$

■

Proposizione 2. Nelle ipotesi del Modello (a), il processo $\{C_1, C_2, \dots\}$ è una catena markoviana.

Dim. Fissiamo t, i, j e $K_{t-1} = (C_1 = j_1, C_2 = j_2, \dots, C_{t-1} = j_{t-1})$ e proviamo che

$$Pr(C_{t+1} = j | C_t = i, K_{t-1}) = Pr(C_{t+1} = j | C_t = i) = p_{ij}.$$

Il primo membro

$$Pr(C_{t+1} = j | C_t = i, K_{t-1}) = \sum_n Pr(C_{t+1} = j, N_t = n | C_t = i, K_{t-1})$$

$$= \sum_n \underbrace{Pr(N_t = n | C_t = i, K_{t-1})}_{\substack{p_n \\ \text{(Proposizione 1)} \\ \text{non dipende da } t,\, K_{t-1}}} \underbrace{Pr(C_{t+1} = j | N_t = n, C_t = i, K_{t-1})}_{\substack{\text{0 o 1} \\ \text{non dipende da } t,\, K_{t-1}}}$$

$$\triangleq \alpha(i, j).$$

Da quanto sopra, $Pr(C_{t+1} = j | C_t = i, K'_{t-1}) = \alpha(i, j)$, per qualunque K'_{t-1} storia di occupazione delle classi negli anni da 1 a $t - 1$, purché $C_t = i, K'_{t-1} \neq \phi$.

Il secondo membro

$$Pr(C_{t+1} = j | C_t = i) = \sum_{K'_{t-1}} Pr(C_{t+1} = j, K'_{t-1} | C_t = i)$$

$$= \sum_{K'_{t-1}} Pr(K'_{t-1} | C_t = i)\, Pr(C_{t+1} = j | C_t = i, K'_{t-1})$$

$$= \alpha(i,j) \sum_{K'_{t-1}} Pr(K'_{t-1} | C_t = i) = \alpha(i,j).$$

Pertanto,

$$Pr(C_{t+1} = j | C_t = i, K_{t-1}) = Pr(C_{t+1} = j | C_t = i)$$

e tale probabilità non dipende da t. ■

Osservazioni.

- Per assegnare la legge del processo $\{C_1, C_2, \dots\}$, basta conoscere
  - la distribuzione iniziale $\boldsymbol{a}_1 = (Pr(C_1 = 1), \dots, Pr(C_1 = J))$, che è supposta assegnata,
  - la matrice $\boldsymbol{P}$ delle probabilità condizionate di transizione; notiamo che se sono date le regole evolutive del sistema, la $\boldsymbol{P}$ si ottiene dalle assegnate p_n, $n = 0,1, \dots$

  Esempio. Sistema "italiano"

	n_{t-1}				
	0	1	2	3	4+
c_t	$c_{t-1} - 1$	$c_{t-1} + 2$	$c_{t-1} + 5$	$c_{t-1} + 8$	$c_{t-1} + 11$

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	...	**16**	**17**	**18**
1	p_0	0	p_1	0	0	p_2	...	0	0	0
2	p_0	0	0	p_1	0	0	...	0	0	0
3	0	p_0	0	0	p_1	0	...	0	0	0
...				...						
...				...						
17	0	0	0	0	0	0	...	p_0	0	$1 - p_0$
18	0	0	0	0	0	0	...	0	p_0	$1 - p_0$

Le $(Pr(C_1 = 1), \dots, Pr(C_1 = J)), p_n$, $n = 0,1, \dots$, possono essere stimate tramite le frequenze relative osservate.

- Se la catena $\{C_1, C_2, \ldots\}$ è regolare, esiste la distribuzione asintotica, determinabile risolvendo il sistema $\begin{cases} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{I}) = \boldsymbol{0} \\ \sum_{j=1}^{J} v_j = 1 \end{cases}$

- Il modello è spesso utilizzato per la valutazione dei sistemi BM, tipicamente pensando di collocare inizialmente tutti gli assicurati in una medesima classe, la classe d'ingresso, e studiando, in particolare, il sistema "a regime" (la distribuzione asintotica).

- Nel modello si calcolano facilmente gli indicatori per la valutazione di un sistema BM, al variare di t,
  - la distribuzione degli assicurati tra le classi $Pr(C_t = j)$, $j = 1, \dots, J$, $\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{P}, \dots$
  - i coefficienti medi di premio $b_t = \sum_{j=1}^{J} \pi_j Pr(C_t = j)$,
  - i premi di equilibrio, se sono assegnati i risarcimenti attesi per sinistro $E(Y_t)$; da

$$\sum_{j=1}^{J} P_t^{(e)} \pi_j Pr(C_t = j) = E(X_t)$$

segue

$$P_t^{(e)} = \frac{E(X_t)}{b_t} = \frac{E(N_t)E(Y_t)}{b_t},$$

con

$$E(N_t) = \sum_{j=1}^{J} Pr(C_1 = j) \underbrace{E(N_t|C_1 = j)}_{= \sum_n np_n} = \sum_n np_n.$$

- Commento sulle ipotesi del Modello (a)
  - $N_1|C_1 = j, N_2|C_1 = j, \ldots$ identicamente distribuiti: si presta alle usuali critiche sulla condizione di stazionarietà,
  - $N_1|C_1 = j, N_2|C_1 = j, \ldots$ stocasticamente indipendenti: benché si tratti di indipendenza condizionata all'informazione sulla classe BM iniziale, non è adeguata se, come accade nei modelli con personalizzazione basata sull'esperienza, si ritenga influente, per la valutazione probabilistica, l'informazione sulla sinistrosità passata,
  - $N_t|C_1 = j$ ha legge indipendente dalla classe BM occupata al tempo iniziale: non adeguata se gli assicurati sono già ripartiti in classi di merito all'istante iniziale, in tale caso è naturale pensare di fare dipendere dalla classe BM occupata la valutazione probabilistica.

Modello (b)

Si fa dipendere la legge del processo $\{C_1, N_1, N_2, \dots\}$ da un parametro aleatorio di rischio U che tiene conto del profilo di rischio dell'assicurato.

Si assume che

- $N_1|U = u, C_1 = j,\ N_2|U = u, C_1 = j, \dots$ siano iid, per ogni $j = 1, \dots, J$, per ogni u determinazione di U,
- $N_t|U = u, C_1 = j \sim P(\lambda_j u)$, $\lambda_j > 0$, assegnati,
- $U|C_1 = j \sim gamma(\alpha, \alpha)$, $\alpha > 0$, assegnato,
- C_1 di distribuzione assegnata.

Dalle prime tre condizioni, poiché $(N_t|U = u, C_1 = j) = (N_t|C_1 = j)|(U = u|C_1 = j)$, si ha che

$$\{N_1|C_1 = j, N_2|C_1 = j, \dots\}$$

è un processo Poisson-gamma (λ_j, α). Pertanto,

$$\{N_1, N_2, \dots\}$$

mistura di processi Poisson-gamma con misturante la distribuzione di C_1.

In particolare, se $Pr(C_1 = j_0) = 1$, processo Poisson-gamma (λ_{j_0}, α).

Dal fatto che $\{N_1|C_1 = j, N_2|C_1 = j, \dots\}$ processo Poisson-gamma (λ_j, α), segue

- $N_t|C_1 = j \sim BN\left(\alpha, \frac{\alpha}{\alpha+\lambda_j}\right)$, con

$$E(N_t|C_1 = j) = \lambda_j, \qquad var(N_t|C_1 = j) = \lambda_j + \alpha^{-1}\lambda_j^2,$$

- $Pr(N_1 = n_1, \dots, N_T = n_T|C_1 = j) = \frac{\Gamma(\alpha+\sum_{t=1}^T n_t)}{\Gamma(\alpha)\prod_{t=1}^T n_t!}\left(\frac{\alpha}{\alpha+\lambda_j T}\right)^{\alpha}\left(\frac{\lambda}{\alpha+\lambda_j T}\right)^{\sum_{t=1}^T n_t}$,

- $N_{T+1}|N_1 = n_1, \dots, N_T = n_T, C_1 = j \sim BN\left(\alpha + \sum_{t=1}^T n_t, \frac{\alpha+\lambda_j T}{\alpha+\lambda_j(T+1)}\right)$.

Anche con questo modello si possono calcolare

- $Pr(C_t = h)$, $h = 1, \dots, J$
- $b_t = \sum_{h=1}^J \pi_h Pr(C_t = h)$,
- $P_t^{(e)}$ tale che $\sum_{h=1}^J P_t^{(e)} \pi_h Pr(C_t = h) = E(X_t)$,

ma per t non troppo elevato.

Si ha infatti

$$(C_t = h) = \mathrm{V}_{H_{t-1}\to(C_t=h)}\, H_{t-1},$$

con $H_{t-1} = (C_1 = j, N_1 = n_1, \dots, N_{t-1} = n_{t-1})$: l'evento $(C_t = h)$ può essere descritto come somma logica di tutte le traiettorie iniziali del processo $\{C_1, N_1, N_2, \dots\}$ che portano l'assicurato in classe BM h nell'anno t. Ad esempio, nel sistema "italiano"

$$(C_2 = 7) = (C_1 = 8, N_1 = 0) \vee (C_1 = 5, N_1 = 1) \vee (C_1 = 2, N_1 = 2).$$

Si devono dunque considerare tutte tali traiettorie. Se t non è troppo elevato, si può ricostruire la storia fino a t e si ha allora

$$Pr(C_t = h) = \textstyle\sum_{H_{t-1}\to(C_t=h)} Pr(H_{t-1}),$$

con

$$\begin{aligned} Pr(H_{t-1}) &= Pr(C_1 = j, N_1 = n_1, \dots, N_{t-1} = n_{t-1}) \\ &= Pr(C_1 = j) Pr(N_1 = n_1, \dots, N_{t-1} = n_{t-1} | C_1 = j). \end{aligned}$$

Date le $Pr(C_t = h)$, si trovano i coefficienti medi di premio e, se sono assegnate le $E(Y_t)$, anche i premi di equilibrio, dove $E(X_t) = E(N_t)E(Y_t)$, con

$$E(N_t) = \textstyle\sum_{j=1}^{J} Pr(C_1 = j) E(N_t | C_1 = j) = \sum_{j=1}^{J} Pr(C_1 = j)\lambda_j.$$

Osservazioni.

- Nel processo $\{N_1|C_1 = j, N_2|C_1 = j, \ldots\}$ i numeri aleatori non sono stocasticamente indipendenti, il processo è scambiabile.

- Essendo $N_t|C_1 = j \sim BN\left(\alpha, \frac{\alpha}{\alpha+\lambda_j}\right)$, la distribuzione dipende dalla classe BM iniziale tramite il parametro λ_j.

- Il modello richiede di assegnare i parametri $\lambda_j,\ j = 1, \ldots, J$. Poiché $\lambda_j = E(N_t|C_1 = j)$, si potrebbero stimare tali parametri dai dati, tramite le frequenze sinistri nelle diverse classi BM. Per avere stime affidabili si dovrebbe però disporre di ampie basi di dati in ciascuna classe BM, in pratica la condizione non è usualmente soddisfatta. Notiamo tuttavia, che si può ipotizzare che per alcuni gruppi di classi BM il parametro sia il medesimo, ad es. $\lambda^{(1)}$ per le classi "basse", $\lambda^{(2)}$ per le classi "medie", $\lambda^{(3)}$ per le classi "alte", riducendo in tal modo il numero di parametri da stimare.

Indicatori della capacità di personalizzazione di un sistema BM (cenno)

Consideriamo ancora una collettività di assicurati omogenei, rispetto a caratteristiche osservabili *a priori*, ed "indipendenti": una classe tariffaria. E supponiamo che il sistema BM sia assegnato. Supponiamo che in $t = 1$, tutti gli assicurati siano posti nella classe iniziale del sistema.

Si possono confrontare i seguenti premi in t

Premio BM	Altri premi	
$P_t \pi_{C_t}$	$E(X_t)$	premio *a priori*, non personalizzazione
	$E(X_t \vert U)$	premio individuale, massima personalizzazione
	$E(X_t \vert C_t)$	premio "*a posteriori*", stimatore del premio individuale

Si considerano i seguenti elementi

$A = E\left[\left(E(X_t) - P_t \pi_{C_t}\right)^2\right]$ se "piccolo", il sistema realizza poca personalizzazione

$B = E\left[\left(E(X_t|U) - P_t \pi_{C_t}\right)^2\right]$ se "piccolo", il sistema realizza una buona personalizzazione

$C = E\left[\left(E(X_t|C_t) - P_t \pi_{C_t}\right)^2\right]$ se "piccolo", il sistema realizza una buona personalizzazione, detto *predictive accuracy*

E gli indici $i_1 = \left(\frac{A}{A+B}\right)^{1/2}$, $i_2 = \left(\frac{A}{A+C}\right)^{1/2}$.

Costruzione di scale di coefficienti di premio (cenno)

Consideriamo ancora una collettività di assicurati omogenei, rispetto a caratteristiche osservabili *a priori*, ed "indipendenti": una classe tariffaria.

Supponiamo che il sistema BM sia assegnato, a parte la scala, e che sia prevista una classe BM di riferimento: h tale che $\pi_h = 1$.

Supponiamo che in $t = 1$, tutti gli assicurati siano posti nella classe iniziale del sistema.

Con riferimento ad un fissato assicurato, l'evoluzione tra le classi del sistema BM è allora determinata dalle traiettorie del processo $\{N_1, N_2, \dots\}$.

Consideriamo come riferimento metodologico l'approccio bayesiano e, per semplicità, trattiamo solo la componente "premio per la frequenza".

Assumiamo che la legge del processo $\{N_1, N_2, \dots\}$ dipenda da un parametro aleatorio di rischio U e che si abbia

- $N_1|U = u, N_2|U = u, \dots$ stocasticamente indipendenti, di legge assegnata, per ogni u determinazione possibile di U,
- U di legge assegnata.

Nell'anno t, il premio individuale è $E(N_t|U) = \mu_t(U)$. Obiettivo è ottenere il premio BM in modo da "stimare" il premio individuale.

1) Il premio BM è una funzione della classe BM, sia $g(C_t)$. Una possibilità per determinare g è richiedere che il premio BM accosti il premio individuale "al meglio" nel senso della perdita quadratica attesa (Norberg 1976)

$$\underset{g\in\mathcal{G}}{\operatorname{argmin}}\, E[(\mu_t(U) - g(C_t))^2] \equiv \underset{g\in\mathcal{G}}{\operatorname{argmin}}\, E[(N_t - g(C_t))^2]$$

La soluzione è $g^*(j) = E\,[\mu_t(U)|C_t = j] = E\,[N_t|C_t = j]$.

Essendo h la classe BM di riferimento, si pone

$$\pi_j = \frac{g^*(j)}{g^*(h)} = \frac{E\,[N_t|C_t = j]}{E\,[N_t|C_t = h]}.$$

Infatti, i coefficienti della scala BM hanno il significato di rapporti tra il premio di ciascuna classe BM e il premio della classe BM di riferimento.

Esempio. Sia $\{N_1, N_2, \dots\}$ è un processo Poisson-gamma (λ, α). Poiché si ha

$$(C_t = j) = \mathrm{V}_{H_{t-1} \to (C_t = j)} H_{t-1},$$

con $H_{t-1} = (N_1 = n_1 \dots, N_{t-1} = n_{t-1})$, per la proprietà di disintegrabilità della speranza matematica

$$E\,[N_t | C_t = j] = \textstyle\sum_{H_{t-1} \to (C_t = j)} Pr(H_{t-1} | C_t = j) E(N_t | H_{t-1})$$

con

- $E(N_t | H_{t-1}) = E(N_t | N_1 = n_1, \dots, N_{t-1} = n_{t-1}) = \lambda \frac{\alpha + \sum_{s=1}^{t-1} n_s}{\alpha + \lambda(t-1)}$
- $Pr(H_{t-1} | C_t = j) = \frac{Pr(H_{t-1})}{Pr(C_t = j)} = \frac{\Pr(N_1 = n_1 \dots, N_{t-1} = n_{t-1})}{Pr(C_t = j)}$

$$= \frac{\frac{\Gamma(\alpha + \sum_{s=1}^{t-1} n_s)}{\Gamma(\alpha) \prod_{s=1}^{t-1} n_s!} \left(\frac{\alpha}{\alpha + \lambda(t-1)}\right)^{\alpha} \left(\frac{\lambda}{\alpha + \lambda(t-1)}\right)^{\sum_{s=1}^{t-1} n_s}}{\sum_{H_{t-1} \to (C_t = j)} Pr(H_{t-1})} \qquad \blacksquare$$

Come è evidente dall'ultimo membro,

$$\pi_j = \frac{g^*(j)}{g^*(h)} = \frac{E\ [N_t|C_t = j]}{E\ [N_t|C_t = h]}.$$

tale scala dipende da t. Per ovviare a tale inconveniente si può effettuare le valutazioni per t "elevato", quando il sistema è a regime.

2) Per svincolarsi da t, per determinare g si può richiedere che (Borgan, Hoem, Norberg 1981)

$$\underset{g \in \mathcal{G}}{\operatorname{argmin}} \sum_{t=1}^{T} w_t\, E[(N_t - g(C_t))^2],$$

dove $w_t \geq 0$, sono pesi opportuni.

Si prova che la soluzione è

$$g^*(j) = \frac{\sum_{t=1}^{T} w_t Pr(C_t = j) E[N_t|C_t = j]}{\sum_{t=1}^{T} w_t Pr(C_t = j)}.$$

Si pone

$$\pi_j = \frac{g^*(j)}{g^*(h)}.$$

3) Per determinare la scala si può ragionare come segue (Coene, Doray 1996, Grasso 1997). Nell'approccio bayesiano il premio individuale è stimato dal premio bayesiano, vista la storia $H_{t-1} = (N_1 = n_1, \dots, N_{t-1} = n_{t-1})$,

$$E(N_t|H_{t-1}) = E(N_t)\underbrace{\frac{E(N_t|H_{t-1})}{E(N_t)}}_{\substack{\text{coefficiente di aggiornamento bayesiano} \\ \triangleq\, c_t(n_1, \dots, n_{t-1})}}$$

Ad esempio, nel modello Poisson gamma

$$c_t(n_1 \dots, n_{t-1}) = \frac{\alpha + \sum_{s=1}^{t-1} n_s}{\alpha + \lambda(t-1)}.$$

Nel sistema BM, vista la storia $H_{t-1} = (N_1 = n_1, \dots, N_{t-1} = n_{t-1})$, a partire dalla classe d'ingresso, l'assicurato è collocato in una classe BM che indichiamo con $j(n_1, \dots, n_{t-1})$ alla quale corrisponde il coefficiente di premio $\pi_{j(n_1,\dots,n_{t-1})}$.

Notiamo che i due coefficienti

$$c_t(n_1, \dots, n_{t-1}) \qquad\qquad \pi_{j(n_1,\dots,n_{t-1})}$$

hanno significato analogo

- $c_t(n_1, \dots, n_{t-1})$ è il coefficiente che moltiplicato per il premio *a priori* permette di ottenere il premio basato sull'esperienza individuale,
- $\pi_{j(n_1,\dots,n_{t-1})}$ è il coefficiente che moltiplicato per il premio di riferimento permette di ottenere il premio basato sull'esperienza individuale.

Allora, per determinare i coefficienti della scala BM, si può porre come obiettivo l'accostamento tra i due coefficienti

$$\min_{\pi_1,\dots,\pi_J} \sum_{\substack{t=1 \\ n_1,\dots,n_{t-1}}}^{T} w_{t,n_1\dots,n_{t-1}} \left(\pi_{j(n_1,\dots,n_{t-1})} - c_t(n_1, \dots, n_{t-1})\right)^2,$$

dove $w_{t,n_1,\dots,n_{t-1}} \geq 0$, sono pesi opportuni.

Si considerano dei vincoli, quali $\pi_{j+1} \geq \pi_j$ per ogni j; $\pi_h = 1$; una condizione di sufficienza dei premi,… Il problema può essere risolto con procedimento numerico.

Concludiamo con le seguenti osservazioni.

Abbiamo considerato una collettività di rischi omogenei rispetto a caratteristiche osservabili a priori, una classe tariffaria. Un portafoglio è costituito da diverse classi tariffarie.

Le analisi di valutazione dei sistemi BM possono essere sviluppate in un portafoglio ripartito in classi tariffarie considerando gli elementi introdotti per ciascuna classe tariffaria.

La costruzione di una scala di coefficienti BM di portafoglio richiede invece di tenere conto congiuntamente dei due tipi di personalizzazione, introducendo anche un processo per descrivere l'evoluzione tra le classi tariffarie.

Alcuni riferimenti

M. Denuit, X. Marechal, S. Pitrebois, J. Walhin (2007), *Actuarial Modelling of Claim Counts: Risk Classification, Credibility and Bonus-malus Systems*, Wiley

R. Kaas, M. Goovaerts, J. Dhaene, M. Denuit (2001), *Modern actuarial risk theory Using* R, (prima e seconda edizione), Kluwer

J. Lemaire (1995), *Bonus-malus systems in automobile insurance*, (seconda edizione), Kluwer