BRST symmetry

Partiamo da una teoria di gauge con Lagrangiana gauge invar.

$$\mathcal{L}_{g.i} = -\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu} + \mathcal{L}_M(\psi, D\psi)$$

fermioni in rap. R del gruppo di gauge

Il P.I. è dato da

$$\int \mathcal{D}A\,\mathcal{D}c\,\mathcal{D}\bar{c}\,\mathcal{D}\psi\,\mathcal{D}\bar{\psi}\; e^{i\int d^4x\,\mathcal{L}} \quad \text{con} \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}_{g.i} + \underbrace{\mathcal{L}_{g.f} + \mathcal{L}_{gh}}$$

La loro forma dipende dalla scelta della funzione $G(A)$.

La Lagrangiana L è RINORMALIZZABILE nel senso che tutti i termini hanno MASS-DIMENSION ≤ 4.

Per provare che la teoria è RINORMALIZZABILE (cioè si possono cancellare tutti gli infiniti), bisogna mostrare che c'è un controtermine (generato dalla ridefinizione dei parametri in $\mathcal{L}$) per ogni divergenza.

Becchi, Rouet, Stora, Tyutin

BRST Symmetry:

$$\int \mathcal{D}A\,\mathcal{D}c\,\mathcal{D}\bar{c}\,\mathcal{D}\psi\,\mathcal{D}\bar{\psi}\; e^{i\int \mathcal{L}} \quad \text{con} \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}_{YM} + \mathcal{L}_M + \mathcal{L}_{g.f.} + \mathcal{L}_{gh}$$

La Lagrangiana $\mathcal{L}$ ha una SIMMETRIA GLOBALE.

- Per convenienza riscriviamo

$$e^{\frac{i}{2\xi}\int(\partial_\mu A^\mu)^2} = \int \mathcal{D}B\; e^{i\int \underbrace{\left(\frac{\xi}{2}B^2 - B^a \partial_\mu A^{a\mu}\right)}_{\otimes}}$$

$\otimes$: $\frac{\xi}{2}\left(B^2 - \frac{2}{\xi} B\partial_\mu A^\mu\right) = \frac{\xi}{2}\left(B - \frac{1}{\xi}\partial_\mu A^\mu\right)^2 - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2$

Il campo B è un campo AUSILIARIO (non propagante) scalare nella rap. Adj. [Moltiplicatore di Lagrange]

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(F^a_{\mu\nu})^2 + \bar\psi(i\not{D} - m)\psi + \frac{\xi}{2}(B^a)^2 \underbrace{- B^a\partial^\mu A^a_\mu}_{-B^a G^a(A)} + \underbrace{\bar c^a(-\partial^\mu D_\mu)^{ab} c^b}_{\bar c^a \Omega^{ab}_{FP} c^b}$$

è invariante sotto la sim. (continua) di BRST:

$$\delta A^a_\mu = \epsilon (D_\mu c)^a = \epsilon(\partial_\mu c^a - g f^{abc} A^b_\mu c^c)$$

$$\delta\psi = -ig\epsilon c^a t^a_R \psi$$

formalmente uguali a TRASF. di GAUGE con parametro $g\epsilon c(x)$

$$\delta c^a = \frac{1}{2} g \epsilon f^{abc} c^b c^c$$

Trasf. GLOBALE, ma non è LINEARE (cioè del tipo $\delta\varphi = \beta\cdot\varphi$)

$$\delta \bar c^a = -\epsilon B^a$$

$$\delta B^a = 0 \leftarrow$$

questo permetterebbe di rimpiazzare $\frac{\xi}{2}(B)^2$ con qualsiasi funzionale $F[B]$, mantenendo BRST-inv.
(in ogni caso, per diagrammatica e rinorm., conviene tenere term. quadr.)

ϵ è un parametro (costi) continuo ; ϵ è un numero di GRASSMANN

Dimostriamo l'invarianza di $\mathcal{L}$ sotto BRST:

- $-\frac{1}{4}(F^a_{\mu\nu})^2 + \mathcal{L}_\Pi$ è gauge inv. $\Rightarrow$ inv. sotto BRST
- $\frac{\xi}{2}(B^a)^2$ è manifestamente BRST-inv.

Consideriamo quindi

$$\delta\left(-B^a\partial^\mu A^a_\mu + \bar c^a(-\partial^\mu D^{ab}_\mu)c^b\right) =$$

$$= -\epsilon\, \cancel{B^a \partial^\mu (D_\mu c)^a} - \underbrace{\delta \bar{c}^a}_{-\epsilon B^a} \cancel{\partial^\mu D_\mu c^a} - \bar{c}^a \partial^\mu \delta (D_\mu c)^a$$

$\delta A_\mu^a = \epsilon (D_\mu c)^a$

$\delta \psi = -ig\,\epsilon\, c^a t_R^a \psi$

$\delta c^a = \frac{1}{2} g\, \epsilon f^{abc} c^b c^c$

$\delta \bar{c}^a = -\epsilon B^a$

$\delta B^a = 0$

$\downarrow$

Calcoliamo

$$\delta (D_\mu c)^a = \delta \left(\partial_\mu c^a - g f^{abc} A_\mu^b c^c \right) =$$

$$= \partial_\mu \delta c^a - g f^{abc} \epsilon \left(\partial_\mu c^b - g f^{bkm} A_\mu^k c^m \right) c^c - g f^{abc} A_\mu^b \delta c^c$$

$$= \underbrace{\left(\partial_\mu \delta c^a - \underbrace{g f^{abc} \epsilon\, \partial_\mu c^b c^c}_{= \frac{1}{2} g f^{abc} \epsilon\, \partial_\mu (c^b c^c)} \right)}_{= \partial_\mu \left(\delta c^a - \frac{\epsilon}{2} g f^{abc} c^b c^c \right) = 0} - g f^{abc} \left(A_\mu^b \underbrace{\delta c^c}_{= \frac{1}{2} g \epsilon f^{cde} c^d c^e} - g f \epsilon A_\mu^k c^m c^c \right)$$

$$= -g f^{abc} \epsilon \left(A_\mu^b \frac{1}{2} g f^{cde} c^d c^e - g f^{bkm} A_\mu^k c^m c^c \right)$$

$$= -\frac{1}{2} g^2 \epsilon A_\mu^s c^p c^q \underbrace{\left(f^{asc} f^{cpq} - f^{alq} f^{lsp} + f^{alp} f^{lsq} \right)}_{-f^{asc} f^{pcq} - f^{aqc} f^{scp} - f^{apc} f^{qcs} = 0 \text{ per Id. Jacobi}}$$

Id Jacobi : $[t^m, [t^s, t^k]] + [t^s, [t^k, t^m]] + [t^k, [t^m, t^s]] = 0$

$= i [t^m, f^{skh} t^h]$ + perm. cicl. (msk)

$$= \underbrace{\left[-f^{mha} f^{skh} + \text{''} \right]}_{0\ \forall a} t^a$$

$f^{amh} f^{khs}$ + perm. cicliche $= 0$

$\Rightarrow \delta (D_\mu c)^a = 0$

$\Rightarrow \mathcal{L}$ è inv. sotto BRST //

BRST simm. $\longrightarrow$ ci sarà una carica conservata Q_{BRST}

t.c. $\delta\varphi = \epsilon \overbrace{Q_{BRST}}^{*} \cdot \varphi$

$\uparrow$ generatore

Siccome ϵ è n° Grassm. allora $Q_{BRST}\cdot\varphi$ ha statistica opposta a φ

$*$: mappa tra campi $Q_{BRST}: \{fields\} \to \{fields\}$

La trasf. di BRST è NILPOTENTE : ("applicata due volte fa zero")

$\delta A^a_\mu = \epsilon (D_\mu c)^a$

$\delta\psi = -ig\,\epsilon\, c^a t^a_R \psi$

$\delta c^a = \frac{1}{2} g\,\epsilon f^{abc} c^b c^c$

$\delta \bar{c}^a = -\epsilon B^a$

$\delta B^a = 0$

$$\delta_1\delta_2 A^a_\mu = \delta_1\left(\epsilon_2 (D_\mu c)^a\right) = \epsilon_2\, \delta_1 (D_\mu c)^a = 0$$

$$\delta_1\delta_2\psi = ig\epsilon_2\,\delta_1(c^a t^a_R\psi) =$$

$$= ig\epsilon_2\Big(\frac{1}{2} g\,\epsilon_1 f^{abc} c^b c^c t^a_R \psi$$

$$+ ig_{\epsilon_1} c^a t^a_R \cancel{\epsilon_1}\, c^d t^d_R \psi\Big) = 0$$

$$\frac{i}{2} g\epsilon_1\, c^a c^d [t^a_R, t^d_R] = -\frac{1}{2} g\,\epsilon_1 f^{adq} c^a c^d t^q_R$$

$$\delta_1\delta_2 c^a = \frac{1}{2} g\,\epsilon_2 f^{abc}\,\delta_1(c^b c^c) = \frac{1}{4} g^2 \epsilon_2\epsilon_1 f^{abc}\big(f^{bpq} c^p c^q c^c - f^{cpq} c^b c^p c^q\big) = 0$$

ϵ_1 passa un c — antisym. in bc

$$\frac{1}{2} g^2 \epsilon_2\epsilon_1 f^{abc} f^{bpq} \underbrace{c^p c^q}_{\text{antisim. in } p,q,c} c^c =$$

$$= \frac{1}{6} g^2 \epsilon_2\epsilon_1\, c^p c^q c^c \big(f^{abc} f^{bpq} + f^{abp} f^{bqc} + f^{abq} f^{bcp}\big)$$

$= 0$ per ID. di JACOBI

$$\delta_1\delta_2 \bar{c}^a = -\epsilon_2\,\delta_1 B^a = 0$$

$$\delta_1\delta_2 B^a = 0$$

Consideriamo due campi ϕ_1, ϕ_2 (non necessariam. allo stesso tipo)

$Q_{BRST} \equiv Q_B$

$$\delta(\phi_1\phi_2) = \delta\phi_1\,\phi_2 + \phi_1\,\delta\phi_2 = (\epsilon Q_B\cdot\phi_1)\phi_2 + \phi_1(\epsilon Q_B\cdot\phi_2)$$

Grassmann

$$= \epsilon\left[(Q_B\cdot\phi_1)\phi_2 \pm \phi_1(Q_B\cdot\phi_2)\right]$$

$+$ se ϕ_1 è bos.

$-$ " ϕ_1 è ferm. (o gh)

$$\delta\left(Q_B\phi_1\,\phi_2 \pm \phi_1\,Q_B\phi_2\right) = \epsilon'\underbrace{\cancel{Q_B^2}}_{=0}\phi_1\cdot\phi_2 + Q_B\phi_1\,\epsilon' Q_B\phi_2$$
$$\pm\left(\epsilon' Q_B\phi_1\,Q_B\phi_2 + \phi_1\,\epsilon'\underbrace{\cancel{Q_B^2}}_{=0}\phi_2\right)$$
$$= \epsilon'\left[\mp Q_B\phi_1\,Q_B\phi_2 \pm Q_B\phi_1\,Q_B\phi_2\right] = 0$$

$\Rightarrow$ BRST è NILPOTENTE quando agisce su ogni prodotto di campi valutati a pti arbitrari.

Siccome ogni funzionale $F[\phi]$ può essere scritto come somma di integrali multipli di tali prodotti

$$\Rightarrow \delta^2_{BRST} F[\phi] = 0 \Rightarrow \text{BRST è NILPOTENTE}$$

La trasf. di BRST data rende inv. qualsiasi lagrangiana ottenuta col procedim. di FP, che $\forall$ scelta di $G(A)$:

$$-B^a\partial^\mu A^a_\mu + \bar c^a(-\partial^\mu D_\mu)^{ab}c^b + \mathcal{L}_{g.i.}$$

$$-B^a G^a(A) - \underbrace{\bar c^a\,\frac{\delta G^a}{\delta\alpha^b}(A^\alpha)\,c^b}_{} + \mathcal{L}_{g.i.} \leftarrow \text{inv. sotto BRST}$$

$$= \bar c^a\,\frac{\delta G^a}{\delta\epsilon c^b}(A'^{\,BRST})\,c^b = \bar c^a\,\frac{\delta G^a}{\delta A^c_\mu}\,\underbrace{\frac{\delta A'^c}{\delta\epsilon c^b}}_{D_\mu c^c}\,c^b$$

δ_{BRST}

$$-B^a\,\cancel{\frac{\delta G^a}{\delta A^b_\mu}}\,\epsilon D_\mu c^b + \epsilon B^a\,\cancel{\frac{\delta G^a}{\delta A^c_\mu}}\,D_\mu c^c - \bar c^a\,\frac{\delta G^a}{\delta A^c_\mu}\,\underbrace{\delta(D_\mu c)^c}_{=0}$$

Il fatto che $Q^2_{BRST} = 0$ permette di rendere manifesta l'invarianza di $\mathcal{L}$ rispetto a BRST:

- $\delta \mathcal{L}_{g.i.} = 0$
- $$\frac{\xi}{2}(B^a)^2 - B^a \partial^\mu A^a_\mu + \bar{c}^a(-\partial^\mu D^{ab}_\mu)c^b =$$
$$= Q_{BRST} \cdot \Big[\underbrace{\bar{c}^a \partial^\mu A^a_\mu - \frac{\xi}{2}\bar{c}^a B^a}_{=\Psi \text{ (funzionale dei campi)}} \Big]$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}_{g.i.} + Q_{BRST} \cdot \Psi \quad (*)$$

Siccome $Q^2_{BRST} = 0 \Rightarrow Q_{BRST} \cdot \mathcal{L} = 0$

Siamo arrivati alla forma $(*)$ di $\mathcal{L}$ con procedim. di FP.

Ma qta forma è dettata da BRST quantization(+) che è più generale di FP e vale $\forall$ scelta di Ψ.

(+) Richiesta è sempre qlo di integrare su $\mathcal{A}/\mathcal{G}_\infty$.

Deriviamo la CARICA (conservata) di BRST.

Rimaniamo nella gauge $G(A) = \partial_\mu A^{a\mu}$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^2 + \mathcal{L}_M + \frac{\xi}{2}(B^a)^2 - B^a \partial_\mu A^{a\mu} + \partial^\mu \bar{c}^a (D_\mu c)^a$$

ignoriamo il termine di materia per il momento

Calcoliamo i momenti coniugati

$A^a_i \rightarrow F^a_{i0}$

$A^a_0 \rightarrow B^a$ ← ora A_0 ha mom. coniugato

$c^a \rightarrow \partial_0 \bar{c}$

$\bar{c}^a \rightarrow D_0 c$

Teorema di Nöther:

$$\Rightarrow \quad J_\mu^B = - F_{\mu\nu}^a (D^\mu c)^a - B^a (D_\mu c)^a + \frac{1}{2} f^{abc} \partial_\mu \bar{c}^a c^b c^c$$

$$Q_{BRST} = \int d^3x \left[F_{0i}^a (D_i c)^a - B^a (D_0 c)^a + \frac{1}{2} f^{abc} \partial_0 \bar{c}^a c^b c^c \right] \quad (*)$$

Q_{BRST} ha ghost number $= +1$

$$gh\#(Q_B \cdot \varphi) = gh\#(\varphi) + 1$$

⇝ Quantizzazione canonica: otteniamo le regole di comm. trovate quando abbiamo discusso la quant. can. in gauge $A_0 = 0$; inoltre abbiamo anche

$$[A_0^a(\bar{x}, t), B^b(\bar{y}, t)] = i\delta^{ab} \delta^{(3)}(\bar{x} - \bar{y})$$

$$\{c^a(\bar{x}, t), \partial_0 \bar{c}^b(\bar{y}, t)\} = i\delta^{ab} \delta^{(3)}(\bar{x} - \bar{y})$$

$$\{\bar{c}^a(\bar{x}, t), (D_0 c)^b(\bar{y}, t)\} = i\delta^{ab} \delta^{(3)}(\bar{x} - \bar{y})$$

Usando le regole di commutazione canonica, si vede che $\hat{Q}_{BRST}$ in $(*)$ genera le trasformazioni di BRST, cioè

$$Q_B \cdot \varphi = i [\hat{Q}_{BRST}, \varphi]_\pm$$

commutatore

anticommutatore

- Espandiamo i campi sugli op. di creaz. e distruz.
- Gli stati sono dati da $a_q^\dagger |0\rangle$; in particolare $a_{c^a}^\dagger |0\rangle$ crea una particella di ghost.

  ↪ spazio di Fock

- Lo spazio di Fock conterrà sia stati FISICI che stati non-FISICI (per es. ghost e componenti longitudinali di A)
  ↳ ci vuole metodo per distinguere stati FISICI dagli altri.

- Per selezionare gli stati fisici RICHIEDIAMO che gli elementi di matrice fra STATI FISICI NON dipendano dalla scelta di gauge fixing $G(A)$ e quindi NON dipendano dal funzionale Ψ in $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{g.i.} + Q_B \cdot \Psi$.

- La variazione di un elemento di matrice $\langle\alpha|\beta\rangle$ dovuto alla variazione $\Psi \mapsto \Psi + \tilde{\delta}\Psi$ è

$$\langle\alpha|\beta\rangle = \int_{\alpha,\beta} \mathcal{D}\varphi\, e^{iS}$$

$$\langle\alpha|\beta\rangle' = \int_{\alpha,\beta} \mathcal{D}\varphi\, e^{iS + i\tilde{\delta}S}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\delta}\langle\alpha|\beta\rangle &= i\langle\alpha|\tilde{\delta}S|\beta\rangle \\ &\simeq i\langle\alpha|Q_B\cdot\tilde{\delta}\Psi|\beta\rangle \\ &\simeq \langle\alpha|[\hat{Q}_B, \tilde{\delta}\Psi]|\beta\rangle\end{aligned}$$

→ $|\alpha\rangle$ e $|\beta\rangle$ sono STATI FISICI se $\langle\alpha|[\hat{Q}_B, \tilde{\delta}\Psi]|\beta\rangle = 0 \quad \forall\, \tilde{\delta}\Psi$

⇒ Gli STATI FISICI stanno nel NUCLEO dell'operatore di BRST, cioè $Q_B|phys\rangle = 0$

Inoltre, due stati fisici che differiscono per un vettore della forma $Q_B|\chi\rangle$ danno gli stessi elementi di matrice con ogni stato fisico:

$$\langle\alpha|\big(|\beta\rangle + Q_B|\chi\rangle\big) = \langle\alpha|\beta\rangle + \langle\alpha|Q_B|\chi\rangle = \langle\alpha|\beta\rangle$$

⇒ $|phys\rangle$ e $|phys\rangle + Q_B|\chi\rangle$ sono EQUIVALENTI $\forall\, |\chi\rangle$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{H}_{phys} = \frac{\mathrm{Ker}\, Q_B}{\mathrm{Im}\, Q_B} \quad \longleftrightarrow \quad \text{COHOMOLOGY of } Q_{BRST}$$

- I vettori $|\xi\rangle$ t.c. $Q_B|\xi\rangle = 0$ sono detti CHIUSI
- I vettori $|\sigma\rangle$ t.c. $|\sigma\rangle = Q_B|\chi\rangle$ sono detti ESATTI