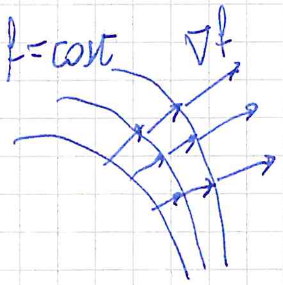
Quindi il gradiente è ortogonale alle linee di livello di f

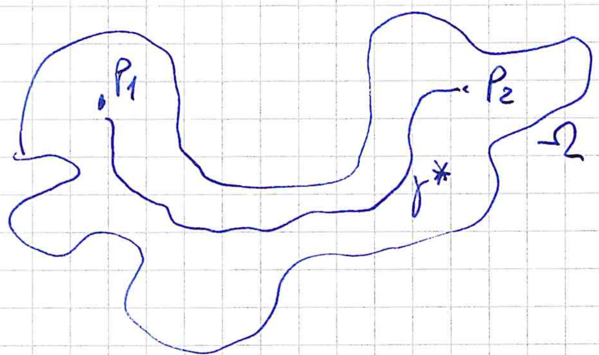


la direzione di massima pendenza è ortogonale alle linee di livello.

PROPOSIZIONE

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ è connesso $\Longleftrightarrow$ Ω è connesso per archi, ovvero

$\forall\, P_1, P_2 \in \Omega$ $\exists$ una curva regolare $\gamma : I \longrightarrow \Omega$ t.c. $\gamma(a) = P_1$ $\gamma(b) = P_2$



TEOREMA

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ connesso, sia $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1. Se $\nabla f(x) = 0$ $\forall\, x \in \Omega$ allora f è costante.

Dim.

Fissiamo $x_0 \in \Omega$.

Sia $x \in \Omega$. prendiamo $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ regolare t.c. $\gamma(a) = x_0$, $\gamma(b) = x$ e $\gamma(t) \in \Omega$ $\forall t$

Calcoliamo $\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0$

$\Rightarrow f(\gamma(t))$ costante in $[a,b]$

$\Rightarrow \left[\begin{matrix} f(\gamma(b)) = f(\gamma(a)) \\ = f(x) \qquad f(x_0) = \end{matrix} \right]$ ▨

TEOREMA DI FERMAT

Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Sia $x_0 \in \Omega$

Si dice che x_0 è punto di minimo (massimo) locale per $f \Leftrightarrow \exists\, r > 0$ t.c. $\forall\, x \in B(x_0, r)$ si ha $f(x) \geq f(x_0)$ $(f(x) \leq f(x_0))$

Teorema

Se f è di classe C^1 e x_0 è punto di minimo o massimo locale, allora $\nabla f(x_0) = 0$

Dim.

Sia $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$. Sia $g(t) = f(x_0 + tv)$
$t \in]-\delta, \delta[$.

allora g ha un minimo (o massimo) locale in $t=0$.

Quindi
$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} g(t)=0 \\ = \nabla f(x_0)\cdot v$$

Per l'arbitrarietà di v, si ha $\nabla f(x_0)=0$. ☒

DERIVATE DI ORDINE SUPERIORE

Sia $f:\Omega\subseteq\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ e supponiamo che la derivata direzionale $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ esiste $\forall x$.

Allora posso chiedermi se tale funzione da Ω a $\mathbb{R}$ sia a sua volta derivabile in qualche direzione. Se esiste

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(x_0),$$

allora si dice che $\exists$ la derivata di ordine 2

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(x_0)$$

Se $\forall\ i,j\ \exists\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(x)\quad \forall x\in\Omega$,

e se tali funzioni sono continue, allora si dice che f è di classe C^2.

TEOREMA DI SCHWARZ (senza dim.)

Se f è C^2, allora $\forall i,j$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(x)=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(x)$

100

ESEMPIO

$$f(x,y) = x^3 y^4$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 y^4 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4x^3 y^3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6xy^4 \qquad \boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 12x^2 y^3}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 12x^2 y^3} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 12x^3 y^2$$