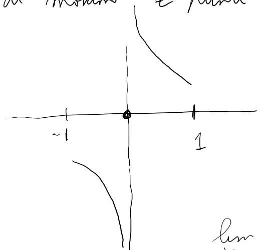
26 ottobre

Osservazione sul teor di Weierstrass.

1) Se $f \notin C^0([a,b])$ non è detto che abbia punti di massimo e punti di minimo



$f:[-1,1]\to\mathbb{R}$

$$* \quad f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & \text{se } x\neq 0\\ 0 & \text{se } x=0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$$

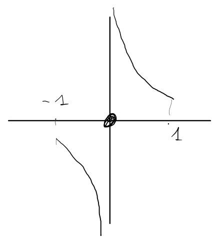
Esercizio Definire esplicitamente due funzioni f, distinte da $*$, con le proprietà seguenti

a) $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$

b) $\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$

c) $\lim_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$

d) $f(0)=0$



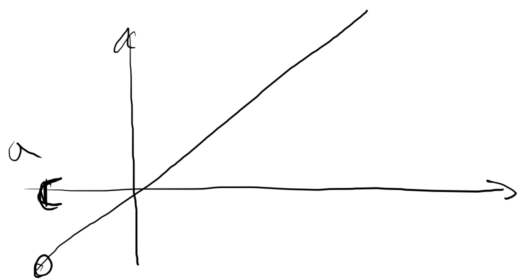
$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & \cancel{x\neq 0} \quad x\neq 0 \quad x\in[-1,1]\\ 0 & \text{se } x=0\end{cases}$$

$$\exists \ \max f([-1,1]) = \sup f([-1,1]) = +\infty$$

Esercizio: scrivere esplicitamente cos'è l'insieme $f([-1,1])$

2) Se $f \in C^0(I)$ I intervallo, ma I non è un intervallo chiuso e limitato non è detto che f abbia punti di massimo e di minimo

Es. se $I = (a, +\infty)$ $f(x) = x$ è continua



$f(I) = (a, +\infty)$

$a = \inf f(I)$

a non il minimo di $f(I)$

$\sup \underset{f(I)}{(a, +\infty)} = +\infty$ non è il massimo di $(a, +\infty)$

Teor Siano $f, g : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, siano

f, g continue in x_0. Allora

1) $f+g$ è continua in x_0

$$\left(\lim_{x \to x_0} \left(f(x) + g(x)\right) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x) = f(x_0) + g(x_0) \right.$$

2) $f\,g$ è continua in x_0

$$\left(\lim_{x \to x_0} f(x)\,g(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \lim_{x \to x_0} g(x) = f(x_0)\,g(x_0) \right)$$

3) Se $g(x_0) \neq 0$ $\frac{f}{g}$ è continua in x_0

$$\left(\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)} \right)$$

$\frac{0}{0}$ $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

Per il quoziente ho utilizzato

Teor (conservazione del segno) Se $f : X \to \mathbb{R}$ $X \subseteq \mathbb{R}$,

$x_0 \in X'$ e se $\lim_{x \to x_0} f(x) = L \in \overline{\mathbb{R}}$, $L \neq 0$

allora $\exists$ $\delta > 0$ t.c. $0 < |x - x_0| < \delta$ e $x \in X$

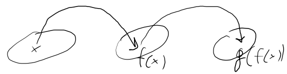
$\Rightarrow f(x)$ ha lo stesso segno di L.

Def Siano X, Y, Z tre insiemi

Siano $f: X \to Y$ e $g: Y \to Z$

$$x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z$$

$$\left(\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right] & Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd} \right)$$



Resta definita una terza funzione $X \xrightarrow{g \circ f} Z$

$$g \circ f(x) = \underline{g(f(x))}$$

Se ad esempio $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

notare che in generale $f \circ g \neq g \circ f$

$$f(x) = x^2 + 2$$

$$g(x) = \frac{x+1}{x+2}$$

$$g(f(x)) = ?$$

$$f(g(x)) = ?$$

$$g(f(x)) = \frac{f(x)+1}{f(x)+2} = \frac{x^2+3}{x^2+4}$$

$$f(g(x)) = g^2(x) + 2 = \left(\frac{x+1}{x+2}\right)^2 + 2$$

$$= \frac{x^2+2x+1}{x^2+4x+4} + 2$$

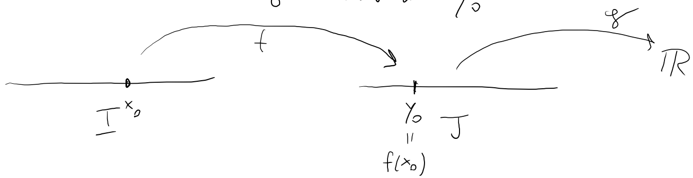
$$= \frac{x^2+2x+1+2x^2+8x+8}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{3x^2+10x+9}{(x+2)^2}$$

$$f(g(x)) = \frac{3x^2+10x+9}{(x+2)^2}, \quad g(f(x)) = \frac{x^2+3}{x^2+4}$$

$$f(g(0)) = \frac{9}{4} \qquad g(f(0)) = \frac{3}{4}$$

Teor Siano $f: I \to J$ e $g: J \to \mathbb{R}$ con I, J due intervalli, $x_0 \in I$, $y_0 \in J$, $y_0 = f(x_0)$ e f continua in x_0 e g continua in y_0



Allora $g \circ f$ e' una funzione continua in x_0

Es 1) $e^{x^2+x+1} \in C^0(\mathbb{R})$

perché è la composizione $g(f(x))$ di

$g(y) = e^y$ ed $f(x) = x^2 + x + 1$

2) fissato $a \in \mathbb{R}$ $x \to x^a$ è in $C^0((0,+\infty), \mathbb{R})$

$x > 0$ $(x \in \mathbb{R}_+)$

$$x^a = e^{\lg(x^a)} = e^{a \lg x} = g(f(x))$$

con $g(y) = \underset{\substack{\cap \\ C^0(\mathbb{R})}}{e^y}$ $\quad f(x) = a \underset{\substack{\cap \\ C^0(\mathbb{R}_+)}}{\lg} x$

$$\mathbb{R}_+ \xrightarrow{f = a \lg x} \mathbb{R} \xrightarrow{e^y} \mathbb{R}$$

1) $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ $\sup \mathrm{Dom}\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right) = +\infty$

$\inf$ $= -\infty$

2) $\lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

1) e 2) vengono espressi scrivendo $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

$\underbrace{\mathrm{Dom}\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)}_{D} \supseteq \mathbb{R}_+$ $\sup(D) \geq \sup(0, +\infty) = +\infty$

$x = -\frac{1}{2}$

$1 + \frac{1}{x} = 1 - 2 = -1$

$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = (-1)^{-\frac{1}{2}} = \left((-1)^{-1}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{(-1)}\right)^{\frac{1}{2}}$

$= (-1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$

Se $1 + \frac{1}{x} > 0$ allora $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ è definita

Notare che se $x < -1 \Rightarrow \frac{1}{x} > -1 \Longrightarrow 1 + \frac{1}{x} > 0$

$\Longrightarrow$ Dominio $\left(\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right) \supseteq (-\infty, -1)$

$\inf(\text{Dominio}) \leq \inf(-\infty, -1) = -\infty$

1) $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

Utilizzeremo $\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ $\quad n \in \mathbb{N}$

Preliminarmente, notiamo che $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]} = e$

Devo dimostrare che

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists K_\varepsilon \ \text{t.c.} \ x > K_\varepsilon \Rightarrow \left| \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]} - e \right| < \varepsilon}$$

Parto dal fatto che $\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists H_\varepsilon \ \text{t.c.} \ n > H_\varepsilon \Rightarrow \left| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e \right| < \varepsilon} \ *$$

Verifichiamo se posso prendere $K_\varepsilon = H_\varepsilon + 1$

$x > K_\varepsilon = H_\varepsilon + 1$ $\quad$ so che $\quad [x] \leq x < [x] + 1$

da cui ricavo $[x] > x - 1$

$$x > K_\varepsilon = H_\varepsilon + 1 \Rightarrow [x] > x - 1 > H_\varepsilon + 1 - 1$$

$$\Rightarrow [x] > H_\varepsilon \Rightarrow \left| \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]} - e \right| < \varepsilon$$

Per dimostrare $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ useremo i Carabinieri

$$[x] \leq x < [x] + 1 \Rightarrow \frac{1}{[x]} \geq \frac{1}{x} > \frac{1}{[x]+1}$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{1}{[x]} \geq 1 + \frac{1}{x} > 1 + \frac{1}{[x]+1}$$

$$\left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} > \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x > \left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]}$$

$\downarrow$ e $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\downarrow$ e

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]} \left(1 + \frac{1}{[x]}\right) = e$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]+1}}{1 + \cancel{\frac{1}{[x]+1}}} = e$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \lim_{y \to +\infty} \left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1} \underbrace{\left(1+\frac{1}{y-1}\right)}_{1} = e$$

$$y = -x \qquad x = -y$$

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y} = \left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y} = \left(\frac{y-1}{y-1+1}\right)^{-y}$$

$$= \left(\frac{1+(y-1)}{y-1}\right)^{y} = \left(\frac{1}{y-1}+1\right)^{y} = \left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1+1}$$

$$= \left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1} \left(1+\frac{1}{y-1}\right)$$