MASSIMI E MINIMI LOCALI

Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1.
Sia $x^0 \in \Omega$ punto di max o min locale.
Abbiamo visto che allora $\nabla f(x_0) = 0$.

Supponiamo ora che $f \in C^2$. Vogliamo vedere in che modo si possono utilizzare le derivate seconde per studiare la natura di un "punto stazionario", ovvero un punto in cui $\nabla f(x_0) = \vec{0}$.

Fissiamo $v \in \mathbb{R}^n$, $\|v\| = 1$ e definiamo

$$\varphi(t) = f(x_0 + tv) \qquad t \in]-\delta, \delta[$$

abbiamo visto che

$$\varphi'(t) = \nabla f(x_0 + tv) \cdot v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0 + tv)\, v_i$$

Segue che

$$\varphi''(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(x_0 + tv)\right) v_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0 + tv)\, v_j\right) v_i$$

da cui

$$\varphi''(0) = \sum_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)\, v_i v_j$$

Allora (polinomio di Taylor)

$$\varphi(t) = \varphi(0) + (\nabla f(x_0) \cdot v)\, t + \frac{1}{2}\sum_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)\, v_i v_j t^2 + r(t)$$

con $\frac{r(t)}{t^2} \xrightarrow{t \to 0} 0$

poiché $\nabla f(x_0) = 0$, si ha

$$\begin{cases} \varphi(t) = f(x_0) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_j} v_i v_j t^2 + r(t) \\ \\ = f(x_0 + tv) \end{cases}$$

Sia ora $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$ qualunque.
Scriviamo $v = \|v\| \frac{v}{\|v\|}$

allora

$$f(x_0 + v) = f(x_0) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_j} v_i v_j + r(\|v\|)$$

(*) con $\frac{r(t)}{t^2} \xrightarrow{t \to 0} 0$

Abbiamo quindi ottenuto uno sviluppo di Taylor di ordine 2 in x_0 per f.
Se ne definiamo la "matrice Hessiana"

$$H_f(x_0) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \right)_{i,j}$$

osserviamo che (*) si può riscrivere così:

$$f(x_0 + v) = f(x_0) + \frac{1}{2} (H_f(x_0) v) \cdot v + r(\|v\|)$$

Per il teorema di Schwarz la matrice $H_f(x_0)$ è simmetrica.

Abbiamo visto che allora gli autovalori di $Hf(x_0)$ sono tutti reali:

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$$

(eventualmente ripetuti, ovvero

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n)$$

Inoltre abbiamo visto che $\forall i \; \exists v^i \in \mathbb{R}^n$ t.c. v^i è autovettore di λ_i, e $v^1, \dots, v^n$ formano una base ortonormale.

Abbiamo quindi che $\forall i \; \forall t_i \in \mathbb{R}$

$$f(x_0 + t_i v^i) = f(x_0) + \frac{1}{2} H_f(x_0) v^i \cdot v^i \, t_i^2 + r(t_i)$$
$$= f(x_0) + \frac{1}{2} \lambda_i t_i^2 + r(t_i)$$

Sia ora v qualunque. Si avrà

$$v = \sum_{i=1}^n t_i v^i \quad \text{per } t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$$

$$\left(\text{N.B. } \|v\|^2 = \sum_{i=1}^n t_i^2 \, ! \right)$$

allora

$$f(x_0 + v) = f(x_0 + \sum_i t_i v^i) = f(x_0) +$$
$$+ \frac{1}{2} \Big(H_f(x_0) \sum_i t_i v^i \Big) \cdot \sum_j t_j v^j + r(\|v\|)$$
$$= f(x_0) + \frac{1}{2} \sum_{ij} H_f(x_0) v^i \cdot v^j \, t_i t_j + r(\|v\|) = $$

$$= f(x_0) + \frac{1}{2} \sum_{ij} \lambda_i v^i \cdot v^j t_i t_j + r(\|v\|)$$

$$= f(x_0) + \frac{1}{2} \sum_i \lambda_i t_i^2 + r(\|v\|)$$

Quindi
$$\boxed{\begin{array}{l} f(x_0+v) = f(x_0) + \frac{1}{2} \sum_i \lambda_i t_i^2 + r(\|v\|) \\ \text{dove} \quad v = \sum_i t_i v^i \\ \text{e} \quad \frac{r(t)}{t^2} \xrightarrow{t \to 0} 0 \end{array}}$$

Osserviamo ora gli autovalori $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$

•) Se sono tutti positivi, ovvero
$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$, allora

$$f(x_0+v) - f(x_0) \geq \frac{1}{2} \lambda_1 \|v\|^2 + \underbrace{r(\|v\|)}_{\text{(trascurabile)}}$$

da cui segue che
$f(x_0+v) - f(x_0) > 0$ se v è abbastanza piccolo, quindi x_0 è un minimo locale.

•) Se sono tutti negativi, ovvero
$0 > \lambda_n \geq \dots \geq \lambda_1$, allora
$$f(x_0+v) - f(x_0) \leq \frac{1}{2} \lambda_n \|v\|^2 + \underbrace{r(\|v\|)}_{\text{(trascurabile)}}$$

da cui segue che se v è abbastanza piccolo, allora $f(x_0+v) - f(x_0) < 0$, quindi x_0 è un massimo locale.

•) Se una parte degli autovalori sono negativi e una parte positivi

$$\lambda_1 \le \lambda_2 \le \dots \le \lambda_k < 0 < \lambda_{k+1} \le \dots \le \lambda_n$$

Allora si ha che se $v \in \operatorname{span}\langle v^1, \dots, v^k \rangle$

$$f(x_0+v) - f(x_0) \le \frac{1}{2} \lambda_k \|v\|^2 + \underline{o(\|v\|)} \text{ (trascurabile)}$$

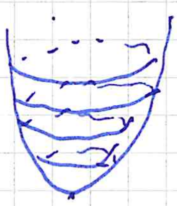
e quindi f ristretta a $\operatorname{span}\langle v^1, \dots, v^k \rangle$ ha un massimo locale in x_0

mentre se $v \in \operatorname{span}\langle v^{k+1}, \dots, v^n \rangle$

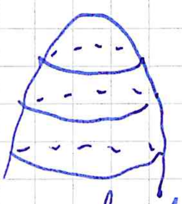
$$f(x_0+v) - f(x_0) \ge \frac{1}{2} \lambda_{k+1} \|v\|^2 + o(\|v\|)$$

e quindi f ristretta a $\operatorname{span}\langle v^{k+1}, \dots, v^n \rangle$ ha un minimo locale in x_0

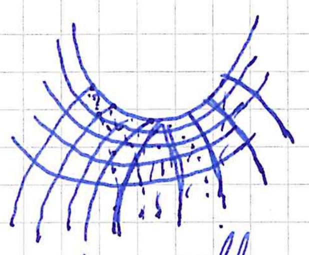
Si dice allora che f ha in x_0 un punto di sella.



min locale



max locale



punto sella

·) Se qualche autovalore è nullo non si può dire niente.

Quindi ricapitolando

Se $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ è di classe C^2
e se $x_0 \in \Omega$ è un punto stazionario
(cioè $\nabla f(x_0) = 0$)
Studio la matrice Hessiana

$$Hf(x_0) = \left(\frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{ij}$$

trovo gli autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

- Se sono tutti positivi ho un minimo
- Se sono tutti negativi ho un massimo
- Se sono parte negativi e parte positivi (ma sempre $\neq 0$) ho un punto di sella
- Se qualche autovalore è nullo non posso dire niente.

ESEMPIO

$$f(x, y) = 4y^2 - 2x^2 y + 2y$$

$$\nabla f(x, y) = (-4xy, \ 8y - 2x^2 + 2)$$

Cerchiamo i punti stazionari

$$\begin{cases} xy = 0 \\ 4y - x^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

se $x=0 \wedge y=0$ no

se $x \neq 0$ allora deve essere $y=0$ e allora $x=\pm 1$

se $y \neq 0$ allora deve essere $x=0$ e allora $y=-\frac{1}{4}$

I punti stazionari sono quindi $(\pm 1, 0)$
e $(0,-\frac{1}{4})$.

Calcoliamo l'Hessiana:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -4y & -4x \\ -4x & 8 \end{pmatrix}$$

•) $H_f(0,-\frac{1}{4}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ autovalori $+1, +8$ entrambi positivi $\Rightarrow$ minimo locale.

•) $H_f(\pm 1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$

$$P(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -4 \\ -4 & 8-\lambda \end{pmatrix} = \lambda(\lambda-8)-16 = \lambda^2 - 8\lambda - 16$$

$$\lambda_{12} = \frac{8 \pm \sqrt{64+64}}{2} = \frac{8 \pm 8\sqrt{2}}{2} = 4 \pm 4\sqrt{2}$$

Sono uno positivo e uno negativo
$\Rightarrow$ punto di sella.

•) $H_f(-1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$

$$P(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 4 \\ 4 & 8-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 8\lambda - 16$$

come sopra

$\Rightarrow$ punto di sella.

MASSIMI E MINIMI ASSOLUTI

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e limitato e sia $f : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua.

Allora per Weierstrass f ammette max e min assoluti.

Vediamo come trovare i punti di max e min assoluti se $f \in C^1$.

1) si cercano i punti stazionari in Ω, ovvero i punti in cui ∇f si annulla

2) eventualmente se $f \in C^2$ si studia l'Hessiana per individuare max e minimi locali

3) si studia f su $\partial\Omega$

4) si confrontano i valori di f nei punti stazionari in Ω su gli eventuali candidati in $\partial\Omega$.

ESEMPIO

$f(x,y) = x^2 + xy + y^2$ su $\overline{\Omega} = \{ x^2+y^2 \leq 1 \}$

$\nabla f(x,y) = (2x+y \, , \, x+2y)$

$\begin{cases} 2x+y=0 \\ x+2y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=-2x \\ -3x=0 \end{cases} \Rightarrow (x,y)=(0,0)$

$f(0,0) = 0$

Consideriamo il bordo $\partial\Omega = \{x^2+y^2=1\}$

possiamo parametrizzarlo come curva

$\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, 2\pi]$

Studiare $f|_{\partial\Omega}$ allora si riduce a studiare

$g(t) := f(\cos t, \sin t) \quad t \in [-\pi, \pi]$

$g(t) = \cos^2 t + \cos t \sin t + \sin^2 t$

$= 1 + \cos t \sin t$

$g'(t) = -\sin^2 t + \cos^2 t$

$g'(t) = 0 \iff \sin^2 t = \cos^2 t \iff$

$t = \pm \frac{\pi}{4}, \ \pm \frac{3}{4}\pi$

$g\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 + \frac{2}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

$g\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 - \frac{2}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$g\left(\frac{3}{4}\pi\right) = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}$

$g\left(-\frac{3}{4}\pi\right) = \dots = \frac{3}{2}$

$g(-\pi) = g(\pi) = 1$

$\Rightarrow$ min in $(0,0)$, $f(0,0) = 0$

max in $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $f = \frac{3}{2}$.