Tutorato Analisi 1 M-Z
Esercitazione 3 - 30/10/2023

Clemente Romano

30 ottobre 2023

1. Di ciascuna delle seguenti funzioni determinare se è crescente, strettamente crescente, decrescente o strettamente decrescente (si considerino come funzioni da $]0,\infty[$ in $\mathbb{R}$)
   (a) $\frac{1}{x}$
   (b) $\frac{x}{x+1}$
   (c) $a^x = exp_a(x)$ nel caso $0 < a < 1$ e nel caso $1 < a$
   (d) $log_a(x)$, cioè la funzione inversa di $exp_a(x)$, nel caso $0 < a < 1$ e nel caso $1 < a$
   (e) $x^a := exp_x(a)$ con $a > 0$
   (f) $\frac{\frac{x}{x+1}}{1+\frac{x}{x+1}}$
   (g) $\max\{1, x^3\}$
2. Sia $f \; : \; I \to \mathbb{R}$ una funzione strettamente crescente ($a < b \implies f(a) < f(b)$) dove $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo non vuoto, siano $a, b \in I$, mostrare che
   (a) $a = b \iff f(a) = f(b)$
   (b) $a < b \iff f(a) < f(b)$
   (c) $a \leq b \iff f(a) \leq f(b)$

   Cosa succede invece se f è strettamente decrescente?
3. Sia (E, d) uno spazio metrico e $f \; : \; E \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Usando il teorema della permanenza del segno si dimostri che :
   (a) L'insieme $\{f > 0\} = \{x \in E \; : \; f(x) > 0\}$ è unione di insiemi aperti.
   (b) se $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ allora gli insiemi
   $$\{f < b\} \; , \; \{a < f\} \; , \; \{a < f < b\}$$
   sono unioni di insiemi aperti.
4. Sia $f \; : \; [0,\infty[\to [0,\infty[$ la funzione "radice quadrata" : $f(x) := \sqrt{x}$, mostrare che
   (a) $a < b \iff f(a) < f(b)$
   (b) $f(a + b) \leq f(a) + f(b)$
   (c) $|f(b) - f(a)| \leq f(|b - a|)$
   (d) f è continua.
   (e) per ogni $L > 0$ esistono $x, y \in [0, 1]$ tali che $|f(x) - f(y)| > L|x - y|$
5. Risolvere l'esercizio precedente nel caso in cui $f(x) = \sqrt[n]{x}$, cioè $f \; : \; [0,\infty[\to [0,\infty[$ è l'unica funzione che soddisfa la proprietà $(f(x))^n = x \;\; \forall x \geq 0$.
6. Si determini l'interno, la chiusura e la frontiera dei seguenti insiemi:
   (a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; y^2 \geq x\}$
   (b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; y > 0 \text{ e } x < 1\}$
   (c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; 2 < x < 5 \text{ e } y \leq 3\}$
   (d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; -3 \leq x \leq 3 \text{ e } -2 \leq y \leq 2\}$
   (e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; x(x - 2) + y(y - 2) < 7\}$
   (f) $\{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 \; : \; x^2 + y^2 \leq 1\}$

I prossimi sono esercizi bonus, quindi potrebbero risultare particolarmente difficili

7. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita nel modo seguente

$$\begin{cases} f(x) = 0 \text{ se } x \text{ è irrazionale} \\ f(p/q) = 1/|q| \text{ se } p, q \in \mathbb{Z} \text{ e sono coprimi} \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Dimostrare che f è continua in x_0 per ogni $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ e non è continua in x_0 per ogni $x_0 \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

8. Dimostrare che $f : E \to \mathbb{R}$ è una funzione continua se e solo se per ogni $y \in \mathbb{R}$ e per ogni $\epsilon > 0$ l'insieme $\{y - \epsilon < f < y + \epsilon\} = \{x \in E : y - \epsilon < f(x) < y + \epsilon\}$ è un insieme aperto.[1]

[1] hint : l'implicazione $\Longrightarrow$ si ottiene dall'esercizio 3, è quindi sufficiente dimostrare $\Longleftarrow$

Email: clemente.romano@sissa.it