Sistemi lineari

Teorema: (teorema di struttura per sistemi lineari arbitrari)

sia $A \cdot X = b$ un sistema lineare in n incognite e sia $\tilde{s}$ una particolare soluzione del sistema; allora $s \in K^n$ è soluzione del sistema se e solo se esiste $s_0 \in K^n$ soluzione di $A \cdot X = 0$ (quest'ultimo è detto il sistema lineare omogeneo associato ad $A X = b$) tale che $s = \tilde{s} + s_0$

Dim: per dimostrare il teorema mostriamo che

$$s \in K^n \text{ è sol. di } A \cdot X = b \iff \exists\, s_0 \in K^n \text{ soluzione di } A \cdot X = 0 \text{ tale che } s = \tilde{s} + s_0$$

"$\Rightarrow$" supponiamo che s sia soluzione di $A \cdot X = b$; dobbiamo mostrare che esiste $s_0 \in K^n$ soluzione di $AX = 0$ tale che $s = \tilde{s} + s_0$; definiamo $s_0 := s - \tilde{s}$; allora vale ovviamente che $s = \tilde{s} + s_0$; ci resta da far vedere che s_0 così ottenuto è soluzione del sistema lineare omogeneo associato; calcoliamo dunque $A \cdot s_0$ e verifichiamo che valga 0:

$$A \cdot s_0 \underset{\text{per definizione}}{=} A \cdot (s - \tilde{s}) \underset{\text{per distributività}}{=} As - A \cdot \tilde{s} \underset{\text{per ipotesi}}{=} b - b = 0$$

"$\Leftarrow$" supponiamo che esiste un $s_0 \in K^n$ soluzione di $A \cdot X = 0$ tale che $s = \tilde{s} + s_0$; dobbiamo mostrare che s è soluzione di $A \cdot X = b$; calcoliamo quindi $A \cdot s$ e verifichiamo che sia uguale a b

$$A \cdot s \underset{\text{per ipotesi}}{=} A(\tilde{s} + s_0) \underset{\text{per distributività}}{=} A \cdot \tilde{s} + A \cdot s_0 = b + 0 = b$$

□.

Quindi, data una soluzione particolare $\tilde{s}$ di $A \cdot X = b$, possiamo scrivere che l'insieme di tutte le soluzioni di $A \cdot X = b$ è

$$\{ \tilde{s} + s_0 \ : \ s_0 \text{ è soluzione di } A \cdot X = 0 \}$$

Oss: le soluzioni di $A \cdot X = b$ formano un sottospazio vettoriale di K^n se e solo se $b = 0$; infatti

"$\Rightarrow$" se le soluzioni di $A \cdot X = b$ sono un sottospazio vettoriale allora $0 \in K^n$ è soluzione, dunque $A \cdot 0 = b$, pertanto $b = 0$

"$\Leftarrow$" se $b = 0$, allora il sistema è omogeneo e la tesi segue dal teorema di struttura per sistemi omogenei.

Esempio: consideriamo il sistema

$$x + 2y - 3z = -1 \qquad \text{con coefficienti in } \mathbb{Q}.$$

messo nella forma $A \cdot X = b$ esso è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix}$$

consideriamo $\tilde{s} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$: esso è soluzione di $AX = b$

per calcolare tutte le soluzioni di $AX = b$, determiniamo tutte le soluzioni di $AX = 0$, ovvero di

$$x + 2y - 3z = 0$$

vediamo che il sistema $AX = 0$ è equivalente a

$$x = -2y + 3z$$

quindi possiamo assegnare un qualsiasi valore u ad y e un qualsiasi valore v a z e ottenere il corrispondente valore di x; quindi le soluzioni di $AX = 0$ si possono scrivere come

$$\begin{pmatrix} -2u + 3v \\ u \\ v \end{pmatrix} \quad \text{per } u, v \in \mathbb{Q}$$

notiamo che

$$\begin{pmatrix} -2u + 3v \\ u \\ v \end{pmatrix} = u \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

concludendo, le soluzioni di $A \cdot X = b$ sono

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \ u, v \in \mathbb{Q} \right\}$$

Il nostro obiettivo ora diventa essere in grado di risolvere un qualsiasi sistema lineare (omogeneo o meno). Per cominciare, ci focalizziamo su un sottoinsieme particolare di sistemi lineari, i cosiddetti sistemi lineari a scala

Def: sia $A \in M_{m,n}(K)$ e sia $r \in \{0, 1, \dots, m\}$ il numero di righe non nulle di A; diciamo che A è una matrice a scala se

- $r = 0$ (ovvero A è la matrice nulla);
- oppure se $r > 0$ e vale che $A_{(i)} \neq (0, \dots, 0)$ $\forall i \in \{1, \dots, r\}$ (ovvero le eventuali righe nulle di A sono "in basso") ed inoltre sia $\bar{j}$ l'indice della prima colonna non nulla e sia $\forall i \in \{1, \dots, r\}$

$$j_i := \min \{ j : a_{ij} \neq 0 \}$$

allora deve valere che $j_1 < j_2 < j_3 < \dots < j_r$ (tutti questi valori sono maggiori o uguali di $\bar{j}$); gli elementi $a_{i j_i}$ sono detti elementi di <u>pivot</u>.

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} j_1 = 2 \\ j_2 = 3 \\ j_3 = 4 \end{matrix} \quad r = 3 \quad \underline{\text{a scala}}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} j_1 = 1 \\ j_2 = 3 \end{matrix} \quad r = 2 \quad \underline{\text{a scala}}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

<u>non</u> a scala perché le righe nulle non sono tutte in basso

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} j_1 = 1 \\ j_2 = 3 \\ j_3 = 3 \end{matrix} \quad r = 3$$

<u>non</u> a scala perché $j_2 = j_3$

Cerchiamo di capire quando un sistema lineare $AX = b$ ha soluzione. Ovviamente se $AX = b$ ha soluzione e le righe $A_{(r+1)}, \dots, A_{(m)}$ sono nulle, allora anche i valori $b_{r+1}, \dots, b_m$ devono essere nulli. Vale il viceversa?

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

il sistema è

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = -4 \\ x_3 + 4x_4 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = -4 \\ x_3 = 5 - 4x_4 \end{cases}$$

posso assegnare un valore a piacimento ad x_4 e determinare il valore corrispondente per x_3

prendiamo $x_4 = 1$, allora

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3 \cdot 1 + 1 = -4 \\ x_3 = 5 - 4 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

posso assegnare un valore a piacimento ad x_2 e determinare il valore corrispondente per x_1

$$\begin{cases} 2x_1 = 1 - 3 - 1 - 4 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 1 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x_1 = -7/2 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

Prop: sia $AX = b$ un sistema lineare dove $A \in M_{m,n}(K)$ e supponiamo che A sia a scala con r righe non nulle; allora

$$A \cdot X = b \text{ è compatibile} \iff b_{r+1} = b_{r+2} = \dots = b_m = 0$$

(ovvero ammette almeno una soluzione)

Dim: "$\Rightarrow$" sia $s \in K^n$ una soluzione, ovvero $s = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$ soddisfa

$$A \cdot s = b$$

per ipotesi, A è a scala e dunque le righe $A_{(r+1)}, \dots, A_{(m)}$ sono tutte nulle; le corrispondenti equazioni sono quindi

$$\begin{cases} 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = b_{r+1} \\ \vdots \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = b_m \end{cases}$$

questo implica quindi che vale

$$\begin{cases} 0 \cdot s_1 + 0 \cdot s_2 + \dots + 0 \cdot s_n = b_{r+1} \\ \vdots \\ 0 \cdot s_1 + 0 \cdot s_2 + \dots + 0 \cdot s_n = b_m \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} b_{r+1} = 0 \\ \vdots \\ b_m = 0 \end{cases}$$

"$\Leftarrow$" supponiamo che per ogni $i > r$ vale che $b_i = 0$ (ovvero $b_{r+1} = \dots = b_m = 0$); per costruire una soluzione procediamo a ritroso partendo "dal basso", ovvero dalle ultime equazioni; per ipotesi, tutte le equazioni dalla $r+1$-esima alla m-esima sono del tipo $0 = 0$ (la matrice A è a scala) la prima equazione non identicamente nulla è la r-esima, che è della forma

$$a_{r,j_r} x_{j_r} + a_{r,j_r+1} x_{j_r+1} + \dots + a_{r,n} x_n = b_r$$

dove $a_{r,j_r} \neq 0$; posso dunque esplicitare x_{j_r}:

$$x_{j_r} = \frac{\left(- a_{r,j_r+1} x_{j_r+1} - \dots - a_{r,n} x_n \right)}{a_{r,j_r}}$$

ora possiamo assegnare valori a piacimento a $x_{j_r+1}, \dots, x_n$ e determinare il corrispondente valore per x_{j_r}.