Sistemi lineari a scala

Enunciato da dimostrare: sia A una matrice a scala, sia $r \in \{0, \dots, m\}$ il numero di righe non nulle di A, allora

$$AX = b \text{ è compatibile } \iff b_{r+1} = \dots = b_m = 0$$

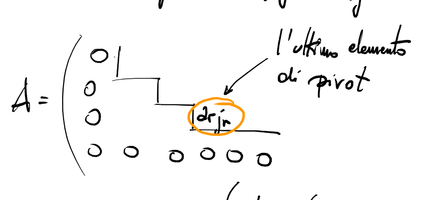
"$\Rightarrow$" visto ieri

"$\Leftarrow$" supponiamo che $b_{r+1} = \dots = b_m = 0$, costruiamo una soluzione $s = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$ di $AX = b$
dato che A è a scala, le ultime righe di A sono nulle e quindi le ultime equazioni del sistema sono del tipo $0 = 0$; l'ultima equazione non identicamente nulla è quella data dalla riga r-esima di A:

$$0 \neq a_{r,j_r} x_{j_r} + a_{r,j_r+1} x_{j_r+1} + \dots + a_{rn} x_n = b_r$$

dove $a_{r,j_r} \neq 0$ perché abbiamo scelto j_r tale che

$$j_r = \min \{ j : a_{rj} \neq 0 \}$$



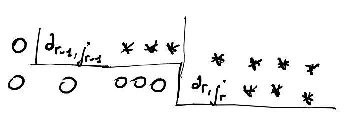
a questo punto possiamo scegliamo valori $s_{j_r+1}, \dots, s_n \in K$ a piacimento e definiamo

$$s_{j_r} := \frac{\left(b_r - \left(a_{r,j_r+1} s_{j_r+1} + \dots + a_{r,n} s_n \right) \right)}{a_{r,j_r}}$$

scegliendo i valori $s_{j_r}, \dots, s_n$ in questo, la soluzione che stiamo costruendo soddisferà l'ultima equazione;
consideriamo ora la penultima equazione non nulla.

$$a_{r-1,j_{r-1}} x_{j_{r-1}} + a_{r-1,j_{r-1}+1} x_{j_{r-1}+1} + \dots + a_{r-1,n} x_n = b_{r-1}$$

dato che A è a scala, abbiamo che $j_{r-1} < j_r$



ora possiamo scegliere a nostro piacimento dei valori

$$s_{j_{r-1}+1}, \dots, s_{j_r - 1} \in K$$

e definire

$$s_{j_{r-1}} = \frac{\left(b_{r-1} - \left(a_{r-1,j_{r-1}+1} s_{j_{r-1}+1} + \dots + a_{r-1,n} s_n \right) \right)}{a_{r-1,j_{r-1}}}$$

e in questa maniera abbiamo determinato valori $s_{j_{r-1}}, \dots, s_n$ in modo che la soluzione che otterremo soddisferà le ultime due equazioni non nulle
a questo punto ripetiamo lo stesso processo per tutte le altre righe $\square$.

Esempio: Consideriamo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{4,6}(\mathbb{R})$$

il risultato precedente ci dice che un sistema lineare del tipo

$$AX = b$$

è compatibile se e solo se $b_4 = 0$ (infatti A è a scala con $r = 3$)
scegliamo quindi ad esempio $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e troviamo una soluzione di $AX = b$; le equazioni non nulle sono:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 + x_6 = 1 \\ -x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 - x_6 = 1 \\ x_4 + 2x_5 + x_6 = 1 \end{cases}$$

partiamo dall'ultima equazione: abbiamo $x_4 = 1 - 2x_5 - x_6$
scegliamo allora ad esempio $s_5 = 1$ ed $s_6 = 0$ e poniamo

$$s_4 = 1 - 2 \cdot s_5 - s_6 = -1$$

adesso passiamo alla penultima equazione non nulla e scriviamo

$$x_2 = -1 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 - x_6$$

scegliamo quindi un valore a piacere per s_3 ad esempio $s_3 = -1$ e determiniamo

$$s_2 = -1 + 3s_3 + 2s_4 + s_5 - s_6 = -1 + 3(-1) + 2(-1) + 1 - 0$$
$$= -1 - 3 - 2 + 1 = -5$$

ci resta ora da considerare solamente la prima equazione

$$x_1 = 1 + x_2 - x_3 - x_4 - 2x_5 - x_6$$

pertanto definiamo

$$s_1 = 1 + s_2 - s_3 - s_4 - 2s_5 - s_6 = 1 - 5 - (-1) - (-1) - 2(1) - 0$$
$$= 1 - 5 + 1 + 1 - 2 = -4$$

in questo modo abbiamo determinato la soluzione

$$s = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ del sistema } AX = b$$

Ora sappiamo dunque determinare soluzioni dei sistemi a scala. Che ce ne facciamo? Fortunatamente vedremo ora a mostrare che saper risolvere sistemi a scala è sufficiente per saper risolvere qualsiasi sistema lineare.

Def: due sistemi lineari $AX = b$ e $A'X = b'$ con

$$A \in M_{m,n}(K) \text{ e } b \in K^m \quad \text{e}$$
$$A' \in M_{m',n}(K) \text{ e } b' \in K^{m'}$$

(quindi i due sistemi hanno lo stesso numero di incognite, ma possono avere un numero diverso di equazioni)
si dicono equivalenti se hanno le medesime soluzioni.

Def: sia $AX = b$ un sistema lineare, allora la matrice ottenuta aggiungendo ad A la colonna data da b, ovvero $(A|b)$ è detta la matrice completa del sistema $AX = b$

Esempio: se consideriamo

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ -x + 2y = 5 \end{cases} \quad \text{allora abbiamo}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad (A|b) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Introduciamo tre operazioni che trasformano ciascuna un sistema lineare in uno equivalente:

OE1. Scambio due equazioni del sistema. Più precisamente, dati $i, j \in \{1, \dots, m\}$, scambiamo di posto l'equazione i-esima e l'equazione j-esima. Questo corrisponde a scambiare la riga i-esima e la riga j-esima della matrice completa.

OE2. Moltiplico un'equazione per uno scalare non nullo. Più precisamente, dati $i \in \{1, \dots, m\}$ e $\lambda \in K$, moltiplichiamo l'i-esima equazione per λ. Questo corrisponde a moltiplicare per λ l'i-esima riga della matrice completa.

OE3. Sommo ad una equazione un multiplo di un'altra equazione. Più precisamente, dati $i, j \in \{1, \dots, m\}$ e $\lambda \in K$, sommo all'i-esima equazione la j-esima equazione, dopo aver moltiplicato quest'ultima per λ. Questo corrisponde a sommare alla riga i-esima della matrice completa λ volte la riga j-esima

Prop: se applichiamo a un sistema lineare $AX = b$ una delle tre operazioni OE1, OE2 oppure OE3, otteniamo un sistema equivalente.

Se ora mostriamo che siamo in grado applicando le tre operazioni precedenti, di trasformare un qualsiasi sistema lineare in uno equivalente e a scala, allora saremo in grado di calcolare soluzioni di un qualsiasi sistema lineare.
La procedura che trasforma un sistema lineare $AX = b$ in uno equivalente a scala usando le tre operazioni elementari precedenti è detta algoritmo di Gauss.

Algoritmo Gradinizzazione di un sistema
Input: matrice completa $(A|b)$ di un sistema lineare
Output: matrice completa $(\tilde{A}, \tilde{b})$ tale che $\tilde{A}$ è a scala e $\tilde{A}X = \tilde{b}$ è equivalente a $AX = b$.

1. Determino $\bar{j}$, l'indice di colonna minimo per cui abbiamo una colonna non nulla di A, ovvero $\bar{j} = \min \{ j : A^{(j)} \neq 0 \}$

$$A \begin{pmatrix} 0 & 0 & * & * & \dots & * \\ 0 & 0 & * & * & & * \\ 0 & 0 & * & * & & * \end{pmatrix}$$
$$\qquad\qquad \uparrow \bar{j}$$

2. Determino un indice $\bar{\imath}$ tale per cui l'elemento $a_{\bar{\imath}\bar{j}}$ è non nullo (l'esistenza di un tale $\bar{\imath}$ deriva dalla scelta di $\bar{j}$)

3. Scambio le righe $\bar{\imath}$ e 1; in questo modo, posso supporre che l'elemento $a_{1\bar{j}}$ sia non nullo

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{1\bar{j}} \neq 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \end{pmatrix}$$

4. Moltiplico la prima riga per $\frac{1}{a_{1\bar{j}}}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \end{pmatrix}$$

5. Per ogni $i \in \{2, \dots, m\}$, sommo alla riga i-esima un opportuno multiplo della prima riga; più precisamente sostituisco l'i-esima riga con

$$A_{(i)} - a_{i\bar{j}} A_{(1)}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * \end{pmatrix}$$

6. Ripeto il procedimento precedente sulla sottomatrice con righe $\{2, \dots, m\}$ e colonne $\{\bar{j}+1, \dots, n\}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{* \; * \; *} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{* \; * \; *} \end{pmatrix}$$

ripetiamo i passi precedenti su questa sottomatrice

Questo algoritmo termina in un tempo finito e restituisce un risultato che rispetta le prescrizioni della specificazione.

Esempio: Consideriamo il sistema lineare dato dalla matrice completa:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 8 & 6 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 3 & 1 \end{array}\right) = (A|b)$$

effettuiamo la gradinizzazione:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 8 & 6 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{OE1} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \leftarrow OE2 \cdot \tfrac{1}{2} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III}-3\cdot\text{I}]{OE3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & -7 & -6 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & -5 & -7 & -6 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -17 & -11 & -17 \end{array}\right)$$