Unione topologica

Unione disgiunta di insiemi. L'*unione disgiunta* di due insiemi X e Y è

$$X \sqcup Y \overset{\text{def}}{=} (X \times \{1\}) \cup (Y \times \{2\}).$$

Più in generale l'*unione disgiunta* di una famiglia di insiemi $\{X_i\}_{i\in I}$ è

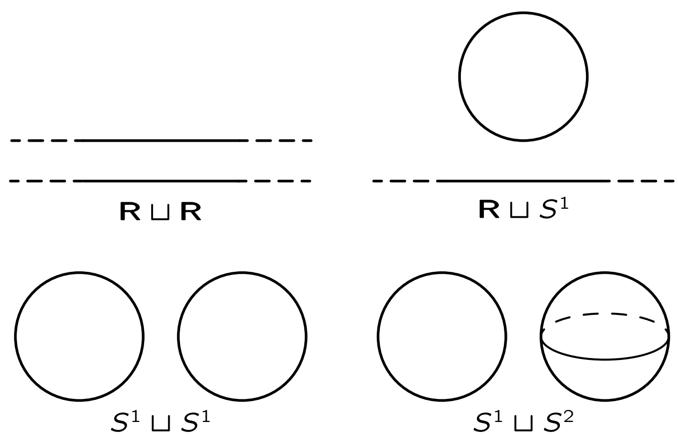
$$\bigsqcup_{i\in I} X_i \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{i\in I} (X_i \times \{i\}).$$

L'unione disgiunta di insiemi non necessariamente disgiunti è l'unione di loro copie disgiunte ottenute identificando X_i con $X_i \times \{i\}$ $\forall\, i \in I$.
L'unione disgiunta di insiemi a due a due disgiunti si identifica con l'unione.

Unione topologica di spazi. L'*unione topologica* di due spazi X e Y è l'unione disgiunta $X \sqcup Y$ con la *topologia unione*

$$\mathcal{T}_\sqcup \overset{\text{def}}{=} \{U \sqcup V \mid U \subset X \text{ e } V \subset Y \text{ aperti}\}.$$

Oss. $W \subset X \sqcup Y$ aperto $\Leftrightarrow$ $W \cap X$ e $W \cap Y$ aperti.
X e Y sottospazi aperti di $X \sqcup Y$.



Definiamo anche l'*unione topologica* di una famiglia di spazi $\{X_i\}_{i\in I}$ come

$$\bigsqcup_{i\in I} X_i$$

con la *topologia unione*

$$\mathcal{T}_\sqcup \overset{\text{def}}{=} \left\{ \bigsqcup_{i\in I} U_i \mid U_i \subset X_i \text{ aperto } \forall\, i \in I \right\}.$$

Oss. Si verifica facilmente che questa è una topologia.

$W \subset \bigsqcup_{i\in I} X_i$ aperto $\Leftrightarrow$ $W \cap X_i$ aperto in X_i $\forall\, i \in I$.

$X_j \subset \bigsqcup_{i\in I} X_i$ sottospazio aperto e chiuso $\forall\, j \in I$.

Definiamo le *immersioni canoniche* $\forall\, j \in I$

$$i_j : X_j \hookrightarrow \bigsqcup_{i\in I} X_i$$
$$i_j(x) = x, \quad \forall\, x \in X_j$$

Oss. i_j immersione aperta e chiusa $\forall\, j \in I$.
$i_j^{-1}(W) = W \cap X_j$, $\forall\, W \subset \bigsqcup_{i\in I} X_i$.

Teor. $f : \bigsqcup_{i\in I} X_i \to Y$ *continua* $\Leftrightarrow f_j := f \circ i_j : X_j \to Y$ *continua* $\forall\, j \in I$.

Def. $f_j = f \circ i_j = f|_{X_j} : X_j \to Y$ è detta j*-esima restrizione* di f.

Oss. Si ha $f(x) = f_j(x)$, $\forall\, x \in X_j$, $\forall\, j \in I$.

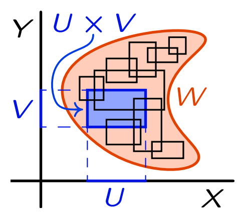
Dim. Basta osservare che $f^{-1}(V) = \bigsqcup_{i\in I} f_i^{-1}(V)$, $\forall\, V \subset Y$ aperto. $\square$

Prodotto topologico

Prodotti topologici finiti. Il *prodotto topologico* di due spazi X e Y è il prodotto cartesiano $X \times Y$ con la *topologia prodotto* avente come base

$$\mathcal{B}_\times \overset{\text{def}}{=} \{U \times V \mid U \subset X \text{ e } V \subset Y \text{ aperti}\}.$$

Gli aperti di $X \times Y$ sono unioni di prodotti di aperti,
e in generale sono più complicati dei prodotti di aperti.



Nel caso di un numero finito n di spazi $X_1, \ldots, X_n$ il *prodotto topologico* è definito come il prodotto cartesiano $X_1 \times \cdots \times X_n$ con la *topologia prodotto* avente per base la famiglia di tutti i prodotti di aperti

$$\mathcal{B}_\times \overset{\text{def}}{=} \{U_1 \times \cdots \times U_n \mid U_i \subset X_i \text{ aperto } \forall\, i = 1, \ldots, n\}.$$

Verifichiamo che $\mathcal{B}_\times$ è base per una topologia su $X_1 \times \cdots \times X_n$.

(1) $X_1 \times \cdots \times X_n \in \mathcal{B}_\times$. $\forall\, U_1 \times \cdots \times U_n,\ V_1 \times \cdots \times V_n \in \mathcal{B}_\times$ si ha

(2) $(U_1 \times \cdots \times U_n) \cap (V_1 \times \cdots \times V_n) = (U_1 \cap V_1) \times \cdots \times (U_n \cap V_n) \in \mathcal{B}_\times$.

Definiamo le *proiezioni canoniche* $\forall\, j = 1, \ldots, n$

$$\pi_j : X_1 \times \cdots \times X_n \to X_j$$
$$\pi_j(x_1, \ldots, x_n) = x_j$$

Oss. π_j continua, suriettiva e aperta $\forall\, j = 1, \ldots, n$.
$\pi_j^{-1}(U_j) = X_1 \times \cdots \times U_j \times \cdots \times X_n$, $\forall\, U_j \subset X_j$.
$\pi_j(U_1 \times \cdots \times U_n) = U_j$.

Teor. $f : Y \to X_1 \times \cdots \times X_n$ *continua* $\Leftrightarrow$ $f_j := \pi_j \circ f : Y \to X_j$ *continua* $\forall\, j = 1, \dots, n$.

Def. $f_j = \pi_j \circ f : Y \to X_j$ è detta *j-esima componente* di f.

Oss. Si ha $f(y) = (f_1(y), \dots, f_n(y))$ e scriviamo $f = (f_1, \dots, f_n)$.

Dim. $\boxed{\Rightarrow}$ f_j è composizione di applicazioni continue quindi è continua.

$\boxed{\Leftarrow}$ $\forall\, U_1 \times \cdots \times U_n \subset X_1 \times \cdots \times X_n$ prodotto di aperti (aperto basico) $\Rightarrow$

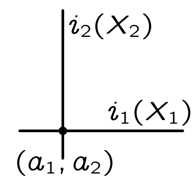
$$f^{-1}(U_1 \times \cdots \times U_n) = f_1^{-1}(U_1) \cap \cdots \cap f_n^{-1}(U_n). \qquad \square$$

Oss. $A_j \subset X_j$ chiuso $\forall\, j = 1, \dots, n \Rightarrow A_1 \times \cdots \times A_n$ chiuso. Infatti:

$$(X_1 \times \cdots \times X_n) - (A_1 \times \cdots \times A_n) = \bigcup_{j=1}^{n} (X_1 \times \cdots \times (X_j - A_j) \times \cdots \times X_n).$$

Immersioni dei fattori. $\forall\, j = 1, \dots, n$ scegliamo un punto $a_j \in X_j \rightsquigarrow$

$$i_j : X_j \hookrightarrow X_1 \times \cdots \times X_n$$
$$i_j(x_j) = (a_1, \dots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \dots, a_n)$$



Oss. $\pi_j \circ i_j = \mathrm{id}_{X_j}$ e $\pi_i \circ i_j = a_i = \text{cost}$ per $i \neq j$.

Prop. *i_j è un'immersione $\forall\, j = 1, \dots, n$. Si ha*

$$i_j(X_j) = \{a_1\} \times \cdots \times X_j \times \cdots \times \{a_n\}.$$

Se $X_1, \dots, X_n$ sono T_1 allora i_j è chiusa $\forall\, j = 1, \dots, n$.

Oss. $\mathcal{B}_i$ base per X_i, $\forall\, i = 1, \dots, n \Rightarrow$

$$\mathcal{B} = \{B_1 \times \cdots \times B_n \mid B_i \in \mathcal{B}_i, \forall\, i = 1, \dots, n\}$$

base per $X_1 \times \cdots \times X_n$.

Teor. *$X_1 \dots, X_n$ metrizzabili $\Rightarrow X_1 \times \cdots \times X_n$ metrizzabile.*

Dim. $d_1, \dots, d_n$ distanze su $X_1 \dots, X_n$ risp. $\rightsquigarrow$

$$d : (X_1 \times \cdots \times X_n) \times (X_1 \times \cdots \times X_n) \to \mathbf{R}$$
$$d((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \max(d_1(x_1, y_1), \dots, d_n(x_n, y_n)).$$
$$\Rightarrow \quad B_d((x_1, \dots, x_n), r) = B_{d_1}(x_1, r) \times \cdots \times B_{d_n}(x_n, r)$$

e la tesi segue dall'osservazione che i prodotti di bocce dello stesso raggio sono base per $X_1 \times \cdots \times X_n$. $\square$

Cor. $\mathbf{R}^n = \underbrace{\mathbf{R} \times \cdots \times \mathbf{R}}_{n \text{ volte}}$ *e* $\mathbf{C}^n = \underbrace{\mathbf{C} \times \cdots \times \mathbf{C}}_{n \text{ volte}}$ *sono prodotti topologici.*

Oss. $f : Y \to \mathbf{R}^n$ è continua $\Leftrightarrow$ tutte le componenti sono continue.

Def. Lo spazio $T^n \overset{\text{def}}{=} \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{n \text{ volte}}$ è detto *n-toro* o *toro n-dimensionale*.

$T^1 = S^1$, $T^2 = S^1 \times S^1$, $T^3 = S^1 \times S^1 \times S^1$.