Lezione 26 ottobre 2023

giovedì 26 ottobre 2023 11:10

Visto:

dato un SL $\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ ✪

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ è la matrice dei coefficienti, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ è la colonna delle incognite

$$\underbrace{m \times n \qquad\qquad n \times 1}_{m \times 1}$$

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ colonna dei termini noti

✪ in forma matriciale $A \cdot X = b$

Def: $(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$

MATRICE COMPLETA DEL SL ✪

Def: Una SOLUZIONE s di ✪ è $s = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \in K^n$ t.c.

$A \cdot s = b$, cioè $\begin{cases} a_{11}s_1 + a_{12}s_2 + \dots + a_{1n}s_n = b_1 \\ a_{21}s_1 + a_{22}s_2 + \dots + a_{2n}s_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}s_1 + a_{m2}s_2 + \dots + a_{mn}s_n = b_m \end{cases}$ ✪✪

PROP.: Un SL $A \cdot x = b$ è COMPATIBILE $\iff b \in \mathrm{Span}(A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)}) \subseteq K^m$

<ins>Dim.</ins>: Osserviamo che

$$A \cdot s = \underbrace{A^{(1)}}_{m \times 1} \cdot s_1 + \underbrace{A^{(2)}}_{m \times 1} \cdot s + \dots + \underbrace{A^{(n)}}_{m \times 1} \cdot s_n$$

$$m \times 1$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}s_1 \\ a_{21}s_1 \\ \vdots \\ a_{m1}s_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{12}s_2 \\ a_{22}s_2 \\ \vdots \\ a_{m2}s_2 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n}s_n \\ a_{2n}s_n \\ \vdots \\ a_{mn}s_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}s_1 + \dots + a_{1n}s_n \\ a_{21}s_1 + \dots + a_{2n}s_n \\ \vdots \\ a_{m1}s_1 + \dots + a_{mn}s_n \end{pmatrix}$$

Quindi: $A \cdot s = b \Rightarrow A^{(1)} \cdot s_1 + \dots + A^{(n)} \cdot s_n = b$

$\Rightarrow b \in \mathrm{Span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)})$

Viceversa: Se b è comb. lineare di $A^{(1)}, \dots, A^{(n)}$

cioè $b = c_1 \cdot A^{(1)} + c_2 \cdot A^{(2)} + \dots + c_n \cdot A^{(n)}$

$= A^{(1)} \cdot c_1 + A^{(2)} \cdot c_2 + \dots + A^{(n)} \cdot c_n = A \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ allora $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ verifica $A \cdot c = b$,

cioè c è SOLUZIONE DI $A \cdot X = b$.

Def.: $\mathrm{Span}(A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)})$ è il SSV delle colonne di A.

OSS: Se $A \cdot X = 0$ è SLO è sempre compatibile

$b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$; una soluz. è quella nulla:

$$s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

* * *

TEO. di STRUTTURA per SOLUZIONI di SLO

Cons. $A \cdot X = 0$. Allora:

① $\forall s, s' \in \mathbb{K}^n$ soluzioni di $A \cdot x = 0$ si ha $s + s'$ è ancora soluzione.

$$s = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}, \quad s' = \begin{pmatrix} s'_1 \\ s'_2 \\ \vdots \\ s'_n \end{pmatrix}, \quad s + s' = \begin{pmatrix} s_1 + s'_1 \\ \vdots \\ s_n + s'_n \end{pmatrix}$$

② $\forall s \in \mathbb{K}^n$ soluzione di $A \cdot x = 0$, e $\forall c \in \mathbb{K}$ si ha $c \cdot s$ è soluzione di SLO.

In altre parole, $W = \{\text{soluz. di } A \cdot X = 0\} \subseteq \mathbb{K}^n$ è un ssv di $\mathbb{K}^n$.

Dim.: ① s soluz. $\Rightarrow A \cdot s = 0$

s' soluz. $\Rightarrow A \cdot s' = 0$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \bullet\ R \times C \text{ è distributivo}}}{A \cdot (s + s')} = A \cdot s + A \cdot s' = 0 + 0 = 0$$

$\Rightarrow s + s'$ è soluz. di $A \cdot X = 0$

② s soluzione $\Rightarrow A \cdot s = 0$

$c \in \mathbb{K}$; $A \cdot (c \cdot s) = c \cdot (A \cdot s) = c \cdot 0 = 0$

$\Rightarrow c \cdot s$ è soluz.

$$A \cdot \begin{pmatrix} cs_1 \\ cs_2 \\ \vdots \\ cs_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot (cs_1) + a_{12} \cdot (cs_2) + \dots + a_{1n} \cdot (cs_n) \\ \vdots \\ a_{m1} \cdot (cs_1) + \dots + a_{mn} (c \cdot s_n) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c \cdot (a_{11} s_1 + \dots + a_{1n} s_n) \\ \vdots \\ c \cdot (a_{m1} s_1 + \dots + a_{mn} s_n) \end{pmatrix} = c \cdot (A \cdot s)$$

OSS.: $s = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ è soluz. di $A \cdot X = 0$

Se c'è solo s come soluz.

$W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Ma se c'è $s \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, e $\mathbb{K}$ è un campo infinito (es. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$)

$\Rightarrow$ ottengo $c \cdot s$ soluz. $\forall c \in \mathbb{K}$

e sono infinite.

* * *

TEO. DI STRUTTURA per SOLUZIONI di SL

Sia $A\cdot X = b$ un SL, e supp. che sia COMPATIBILE (cioè $\exists$ almeno una sua soluzione, diciamo $\tilde{s}$: $A\cdot\tilde{s} = b$)

Allora ogni soluzione s si può scrivere nella forma

$$s = \tilde{s} + s_0$$

con s_0 opportuna soluzione di $A\cdot X = 0$ SLO associato al $A\cdot X = b$ $(A\cdot s_0 = 0)$

Dim. Verifichiamo prima che $\tilde{s}+s_0$ è una soluz. di $A\cdot X = b$:

$$A\cdot(\tilde{s}+s_0) = \underbrace{A\cdot\tilde{s}}_{=b} + \underbrace{A\cdot s_0}_{=0} = b + 0 = b$$

$\Rightarrow$ $\tilde{s}+s_0$ è soluzione di $A\cdot X = b$

Verifico ora che ogni soluzione si può esprimere in questa forma:

sia s una soluzione generica: $A\cdot s = b$

cerco s_0 tale che $s = \tilde{s}+s_0 = \tilde{s} + (s-\tilde{s})$

Pongo $s_0 := s - \tilde{s}$

Se dimostro che s_0 è soluz. di $A\cdot X = 0$ ho finito.

$$A\cdot(s-\tilde{s}) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{distributività}}}{=} A\cdot s - A\cdot\tilde{s} = b - b = 0$$

OSS.: Anche nel caso di SL non omogeneo e compatibile si hanno seguenti possibilità: ($\mathbb{K}$ infinito)

- c'è 1! soluzione $\tilde{s}$
- ci sono infinite soluzioni

$$S = \{\tilde{s}+s_0 \mid s_0 \in W\} = \begin{cases} W = \left\{\begin{pmatrix}0\\ \vdots \\ 0\end{pmatrix}\right\} \Rightarrow S = \{\tilde{s}\} \\ W \text{ è infinito} \Rightarrow S \text{ infinito} \end{cases}$$

dove W ssv delle soluzioni di $A\cdot X = 0$

OSS.: Se SL non è omogeneo, l'insieme S delle soluzioni NON è SSV.

Infatti: $\begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix} \notin S$: $A\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\0\end{pmatrix} \neq b$

SISTEMI LINEARI con A A SCALA

Def: Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ e sia r il numero di righe di A non nulle (diverse dalla $(0\ 0 \cdots 0)$).

A si dice A SCALA se:

① $r = 0$, cioè A matrice nulla, oppure

② $r \neq 0$, $1 \leq r \leq m$ e

$A_{(i)} \neq (0\ 0 \cdots 0)$ $\forall\ 1 \leq i \leq r$

e se poniamo $j_i := \min\{j : a_{ij} \neq 0\}$ $\forall i,\ 1 \leq i \leq r$

si ha

$j_1 < j_2 < \cdots < j_r$

Se A è a scala, gli elementi a_{ij_i} si chiamano PIVOT.

1ª colonna

Es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $r = 3$

$j_1 = 1$

$j_2 = 1$

$j_3 = 2$

$1 = 1 < 2 \Rightarrow$ NON è a scala

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $r = 3$

$a_{1j_1} = a_{11}$, $a_{2j_2} = a_{22}$, $a_{3j_3} = a_{34}$

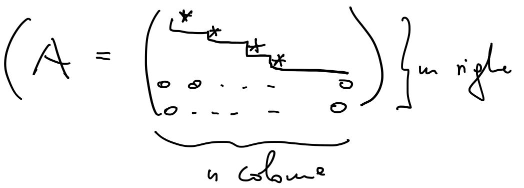
$j_1 = 1$, $j_2 = 2$, $j_3 = 4$

$1 < 2 < 4 \rightarrow$ A è a scala

Quando la matrice dei coefficienti di $A \cdot X = b$ è a scala, è facile trovare soluz. per sostituzione:

$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 1 \\ x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 2 \\ x_4 = 3 \end{cases}$

Teorema: Cons. $A \cdot x = b$ con A a scala, e sia $r = \#$ righe non nulle. Allora $A \cdot x = b$ è compatibile $\Longleftrightarrow b_{r+1} = b_{r+2} = \dots = b_m = 0$.



, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$)

Dim.: $\Rightarrow$ immediato: il SL corrispondente ha eq.

$$\begin{cases} A_{(1)}\cdot X = b_1 \\ A_{(2)}\cdot X = b_2 \\ \vdots \\ A_{(r)}\cdot X = b_r \\ \boxed{(0\,0\dots 0)\cdot X = b_{r+1}} \\ \vdots \\ (0\dots 0)\cdot X = b_m \end{cases}$$

è un'eq. possibile $\Leftrightarrow$ $b_{r+1}=0$, $\vdots$, $b_m=0$

$\Leftarrow$: Supp. $b_{r+1} = \dots = b_m \equiv 0$

e mostriamo che $A\cdot X = b$ ha soluzione

Cons. l'ultima eq. non nulla (la r-esima eq.)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \multicolumn{1}{|l}{a_{1j_1}} & * & -- & * & \cdots & * & * \\ \cline{3-3} 0 & 0\cdots & 0 & \cdots & \multicolumn{1}{|l}{a_{2j_2}} & * & \cdots & -- * & * \\ \cline{5-5} 0 & 0\cdots & 0 & 0 & -- & \multicolumn{1}{|l}{a_{rj_r}} & * & -- & * \\ \cline{6-9} 0\,0 & --- & 0 & 0 & \cdots & -- & -- & - & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\neq 0}{\bigcirc\!\!\!\!\!\!\!\!\;\;a_{rj_r}}\, x_{j_r} + a_{rj_r+1}\, x_{j_r+1} + \dots + a_{rn}\, x_n = b_r$$

$$x_{j_r} = \frac{1}{a_{rj_r}}\Big(b_r - \big(a_{rj_r+1}\, x_{j_r+1} + \dots + a_{rn}\, x_n\big)\Big) = F(x_{j_r+1}, .., x_n)$$

Fisso dei valori a piacere per $x_{j_r+1}, \dots, x_n$,

$x_{j_r+1} = s_{j_r+1} \in \mathbb{K}$, .., $x_n = s_n \in \mathbb{K}$

e trovo $s_{j_r} = F(s_{j_r+1}, .., s_n)$

Considero ora la penultima equazione:

$$\underset{\neq 0}{a_{r-1\, j_{r-1}}}\, x_{j_{r-1}} + \dots + a_{r-1\, n}\, x_n = b_{r-1}$$

$$x_{j_{r-1}} = \frac{1}{a_{r-1\, j_{r-1}}}\Big(b_{r-1} - \big(\Sigma \dots\big)\Big)$$
$$= G(x_{j_{r-1}+1}, \dots, x_n)$$

Fisso valori a piacere per $\overset{s_{j_{r-1}+1}}{\overset{\shortparallel}{x}}_{\underset{\text{indice}}{\boxed{j_{r-1}+1}}}, .., \overset{s_{j_r-1}}{\overset{\shortparallel}{x}}_{j_r-1}$

e cons. i valori trovati prima, e calcolo

$$s_{j_{r-1}} = G(s_{j_{r-1}+1}, \dots, s_n)$$

Procedo così con le equaz. $r-2$, .., fino ed arrivare alla prima. Questa costruzione fornisce una n-pla $\begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$ che verifica tutte le eq.

Es.: $A = \begin{pmatrix} \overset{\neq 0}{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & \overset{\neq 0}{a_{22}} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & a_{35} \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 = b_1 \\ a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + a_{25}x_5 = b_2 \\ \underset{\neq 0}{a_{34}}x_4 + a_{35}x_5 = b_3 \Rightarrow x_4 = \underbrace{\frac{1}{a_{34}}\left(b_3 - a_{35}x_5\right)}_{=F(x_5)} \end{cases}$$

Fisso $x_5 = 1 = s_5$, $x_4 = \underbrace{\frac{1}{a_{34}}\left(b_3 - a_{35}\right)}_{} = s_4 = F(1)$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{23}x_3 - a_{24}x_4 - a_{25}x_5\right)$$

$$\overset{!}{=} G(x_3, x_4, x_5)$$

Fisso $x_3 = 1$, $x_2 = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{23} - a_{24} \cdot F(1) - a_{25}\right)$

Cons. prima eq., $x_1 = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - \sum(\dots)\right)$

Pb.: Dato $A \cdot X = b$, lo posso trasf. in $\tilde{A} \cdot X = \tilde{b}$ con $\tilde{A}$ a scala e che abbia esattamente le stesse soluzioni?

Sì: Usando 3 OPERAZIONI ELEMENTARI SULLE RIGHE:

OE1 Scambio di 2 righe di $(A|b)$

OE2 Molt. di una riga di $(A|b)$ per $c \in K$, $c \neq 0$

OE3 Sostituisco la riga i della matrice $(A|b)$ con:

$$(A|b)_{(i)} \leftarrow (A|b)_{(i)} + c \cdot (A|b)_{(j)}$$

27/10/23

Def.: Due SL $A \cdot x = b$ e $A' \cdot x = b'$

dove $A \in M_{m,n}(K)$

$A' \in M_{m',n}(K)$

$b \in M_{m,1}(K)$, $b' \in M_{m',1}(K)$

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

si dicono EQUIVALENTI

se posto $S = \{s \in K^n : A \cdot s = b\}$ e

$S' = \{s' \in K^n : A' \cdot s' = b'\}$

si ha: $S = S'$

Es: $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 4x - 6y = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x - 3y - 1 = 0 \\ \boxed{2(2x - 3y - 1) = 0} \end{cases}$

è equivalente al SL $\boxed{2x-3y=1}$

$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$ $\qquad A' = (2 \quad -3)$

Prop: Le OE1, OE2 e OE3 su $(A|b)$ trasformano $A \cdot x = b$ in un SL equivalente.

Dim.: OE1 facile, OE2 facile

OE3 $(A|b)$, viene modificata $(A|b)_{(i)} \longrightarrow (A|b)_{(i)} + c \cdot (A|b)_{(j)}$

ottengo $(\tilde{A}|\tilde{b})$: $A' \cdot x = b'$

$$\tilde{A}_{(k)} = \begin{cases} A_{(k)} & \text{se } k \neq i \\ A_{(i)} + c \cdot A_{(j)}, & k = i \end{cases} \qquad b'_k = \begin{cases} b_k & \text{se } k \neq i \\ b_i + c \cdot b_j & k = i \end{cases}$$

Sia ora $s \in S$: $A \cdot s = b$

cons. $A' \cdot s$: $(A' \cdot s)_{(k)} = (A \cdot s)_{(k)} = b_k = b'_k$ se $k \neq i$

$(A' \cdot s)_{(i)} = (A_{(i)} + c \cdot A_{(j)}) \cdot s$

$= A_{(i)} \cdot s + c \cdot A_{(j)} \cdot s = b_i + c \cdot b_j = b'_i$

$$\underbrace{(\underset{m \times n}{A} \cdot \underset{n \times 1}{s})}_{m \times 1}{}_{(k)} \quad , \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Viceversa: se s' è soluz. di $A' \cdot x = b'$,

allora s' è soluzione di $A \cdot x = b$.

Facile (nota);

$A' \cdot s' = b'$, $(A' \cdot s')_{(k)} = b'_k \quad \forall\, k = 1, \dots, m$

$(A \cdot s')_{(k)} = b'_k = b_k$ se $k \neq i$

$(A \cdot s')_{(i)} = (A'_{(i)} - c \cdot A_{(j)}) \cdot s'$

$= (A'_{(i)} - c\, A'_{(j)}) \cdot s'$

$= A'_{(i)} \cdot s' - c \cdot A'_{(j)} \cdot s'$

$= b'_i - c \cdot b'_j = b_i + c \cdot b_j - c \cdot b_j = b_i$

Teo: Dato $A \cdot x = b$, è sempre possibile trasformare, con un numero finito di OE, in un SL equivalente $\tilde{A} \cdot x = \tilde{b}$, con $\tilde{A}$ a scala.

Dim.:

ALGORITMO DI GAUSS:

$A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$; se $A = 0$, è a scala

Se $A \neq O$; Sia $j : 1 \leq j \leq n$ il più piccolo indice di colonna t.c. $A^{(j)} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

sia $i : 1 \leq i \leq m$ t.c. $a_{ij} \neq 0$.

Faccio $\textcircled{\text{OE 1}}$ $(A|b)_{(i)} \longleftarrow (A|b)_{(1)}$

ora ho che $a_{1j} \neq 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \overset{\neq 0}{\boxed{a_{1j}}} & a_{1j+1} & \cdots & \\ 0 & 0 & & 0 & a_{2j} & \vdots & \cdots & \\ 0 & & & \vdots & & \vdots & & \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots & & a_{mn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{mj} & \vdots & & \end{pmatrix}$$

Facciamo $\textcircled{\text{OE3}}$:

$$(A|b)_{(k)} - \frac{a_{kj}}{a_{1j}} \cdot (A|b)_{(1)}$$

$\longleftrightarrow (A|b)_{(k)}$

$\forall k = 2, \dots, m$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1j} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & a_{mj+1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Considero la sottomatrice ottenuta cancellando le prime j colonne e la prima riga e riapplico il procedimento.

Dopo un numero finito di passi l'algoritmo termina.

$$\downarrow$$

es: $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$ $\rightsquigarrow$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 2 \\ \boxed{0} & 0 & \frac{1}{2} & \boxed{-4} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right)$

$\overline{II} - \frac{5}{2} \cdot \overline{I} \overset{\text{OE3}}{\longleftrightarrow} \overline{II}$

$\overline{III} - \frac{3}{2} \cdot \overline{I} \longleftrightarrow \overline{III}$

$\overline{IV} - \frac{4}{2} \cdot \overline{I} \longleftrightarrow \overline{IV}$

$\overline{V} - \frac{1}{2} \cdot \overline{I} \longleftrightarrow \overline{V}$

$$(A|b)_{(2)} - \frac{5}{2}(A|b)_{(1)} = (0\ 5\ 3\ 1) - \frac{5}{2} \cdot (0\ 2\ 1\ 2) = (0\ 5\ 3\ 1) - (0\ 5\ \tfrac{5}{2}\ 5) = \boxed{(0\ 0\ \tfrac{1}{2}\ -4)}$$

$\overline{III} + 3 \cdot \overline{II}$

$\overline{V} - \overline{II}$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$\overline{IV} - \frac{3}{11} \overline{III}$

$\overline{V} + \frac{2}{11} \overline{III}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} 0 \cdot x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ \frac{1}{2} x_3 = -4 \\ 0 = -11 \end{cases}$$

Questo SL è incompatibile

$\Rightarrow$ anche il SL di partenza è incompatibile.

Es:
$$\begin{pmatrix} 0 & \boxed{0} & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{III} \leftrightarrow \mathrm{I}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} \mathrm{II} - 2 \cdot \mathrm{I} \\ \mathrm{II} - \frac{2}{1} \cdot \mathrm{I} \end{matrix} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \leftarrow$$

SL è incompatibile

$\mathrm{II} \leftrightarrow \mathrm{IV}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \mathrm{III} - 3 \cdot \mathrm{II} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{IV} - \tfrac{1}{2}\mathrm{III} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Applicazione:

Cons. k vettori di $\mathbb{K}^m$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad v_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix}$$

Allora $v = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathrm{Span}(v_1, v_2, \dots, v_k)$

$\Longleftrightarrow \exists\ c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbb{K}$ t.c.

$$c_1 \cdot v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_k \cdot v_k = v$$

$$c_1 \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + c_k \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Cons. $A = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mk} \end{pmatrix}}_{m \times k}$

$$= A \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$\Longleftrightarrow$ $A \cdot X = v$ è COMPATIBILE

Quindi: $v \in \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k) \Longleftrightarrow$ il SL $A \cdot X = v$ è compatibile
dove $A^{(i)} = v_i$, $A \in M_{m,k}(\mathbb{K})$

OSS: $v_1, \dots, v_p \in \mathbb{K}^m$, voglio capire se sono LIN. INDIP. o DIP.

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad v_p = \begin{pmatrix} a_{1p} \\ a_{2p} \\ \vdots \\ a_{mp} \end{pmatrix}$$

$$c_1 v_1 + \dots + c_p v_p = 0$$

DIP $\Longleftrightarrow \exists$ c_i non tutti nulli

IND $\Longleftrightarrow$ l'unica è $c_i = 0 \ \forall i$

$$c_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + c_p \begin{pmatrix} a_{1p} \\ \vdots \\ a_{mp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mp} \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_p \end{pmatrix}$ è soluzione di $A \cdot X = 0$

Quindi: $v_1, \dots, v_p \in \mathbb{K}^m$ sono LIN. INDIP. $\Longleftrightarrow$ il SLO $A \cdot X = 0$ ha solo la soluzione nulla
dove $A^{(i)} = v_i$, $A \in M_{m,p}(\mathbb{K})$