Esercizi di Geometria
quinto foglio

October 29, 2023

1. Si considerino i seguenti sistemi lineari:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_5 &= 3 \\ 2x_1 + x_4 - x_5 &= 2 \\ x_2 - x_3 + 2x_5 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 &= 1 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x_1 - x_3 + 3x_4 + x_5 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 + x_5 = 0 \\ -x_1 + x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 - x_3 + 5x_4 + 3x_5 = 3. \end{cases}$$

   Si scrivano le matrici dei coefficienti e la matrice completa, in ciascun caso si trovi un sistema lineare equivalente con matrice dei coefficienti a scala usando l'algoritmo di Gauss, si dica se il sistema è compatibile, e in caso affermativo si trovi la sua generica soluzione.

2. Si dica per quali valori del parametro $t \in \mathbb{R}$ il seguente sistema lineare è compatibile:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + t\, x_3 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= t \\ x_1 + 2x_2 &= 1 - t \end{cases}$$

   e per tali valori di t si determini l'insieme delle sue soluzioni.

3. Si dica per quali valori del parametro $b \in \mathbb{R}$ il seguente sistema lineare è compatibile:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + 3x_4 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 &= 8 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_4 &= b \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 2. \end{cases}$$

   e per tali valori di b si determini l'insieme delle sue soluzioni.

4. Si consideri il sistema lineare omogeneo avente M come matrice associata:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a+2 \\ 2a+1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

   Si discuta la compatibilità del sistema al variare di $a \in \mathbb{R}$.

5. Si consideri il seguente sistema lineare non omogeneo a coefficienti reali:

$$\begin{cases} x - y + z & = & 1 \\ x + y - z & = & -1 \end{cases}$$

Si esprima la generica soluzione nella forma

$$s = \widetilde{s} + s_0,$$

dove $\widetilde{s}$ è una soluzione particolare del sistema lineare, scelta a piacere, e s_0 è una generica soluzione del sistema lineare omogeneo associato.

6. Sono dati i seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Sia $W = \mathrm{Span}(\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3, \mathrm{v}_4)$. Usando l'algoritmo di Gauss, si estragga una base di W dall'insieme dei generatori.