Lezione 16 ottobre 2023

lunedì 16 ottobre 2023 09:16

Visto :

Teorema di Eulero :

$F \in K[x_0, x_1, x_2]$ omogeneo di grado $d \geq 1$

$\Rightarrow \underbrace{(\deg F) \cdot F(x_0, x_1, x_2)} = x_0 \cdot \partial_{x_0} F + x_1 \cdot \partial_{x_1} F + x_2 \cdot \partial_{x_2} F$

Dim. Ricordo : F è omogeneo $\Leftrightarrow$

$\textcircled{*}$ $F(tx_0, tx_1, tx_2) = t^d \cdot F(x_0, x_1, x_2) \in K[x_0, x_1, x_2, t]$

Cons. la seguente derivata parziale: al membro sinistro applichiamo la regola per le funzioni composte

$$\frac{\partial F(tx_0, tx_1, tx_2)}{\partial t} \; / \; \partial_{x_0} F(tx_0, tx_1, tx_2) \cdot \frac{\partial tx_0}{\partial t} + \partial_{x_1} F(tx_0, tx_1, tx_2) \cdot \frac{\partial (tx_1)}{\partial x_1} + \partial_{x_2} F(tx_0, tx_1, tx_2) \cdot \frac{\partial (tx_2)}{\partial x_2}$$

$$= \partial_{x_0} F(tx_i) \cdot x_0 + \partial_{x_1} F(tx_i) \cdot x_1 + \partial_{x_2} F(tx_i) \cdot x_2$$

$=$

$\backslash$ $d \cdot t^{d-1} F(x_0, x_1, x_2)$ è la derivata del membro destro di $\textcircled{*}$

Infine: valuto le 2 espressioni trovate in $t = 1$.

$\Rightarrow x_0 \, \partial_{x_0} F(x_0, x_1, x_2) + x_1 \, \partial_{x_1} F(x_i) + x_2 \, \partial_{x_2} F(x_i) = d \cdot F(x_i)$

* * *

APPLICAZIONI: Ricerca di punti singolari e rette tangenti

Sia $F \in K[x_0, x_1, x_2]$ di grado $d \geq 1$

Sia $Q \in Z_p(F)$; voglio capire se Q è punto singolare opp. liscio.

$Q = (\xi_0 : \xi_1 : \xi_2)$

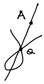
Cons. generica retta per Q : sia $A \in \mathbb{P}^2$

$A \neq Q$, $A = (a_0 : a_1 : a_2)$

$\overline{QA}$: $\begin{cases} x_0 = \lambda \xi_0 + \mu a_0 \\ x_1 = \lambda \xi_1 + \mu a_1 \\ x_2 = \lambda \xi_2 + \mu a_2 \end{cases}$

$$\boxed{F(\lambda \xi_0 + \mu a_0, \lambda \xi_1 + \mu a_1, \lambda \xi_2 + \mu a_2) = G(\lambda, \mu)}$$

è un polinomio omogeneo $\in K[\lambda, \mu]$ di grado d

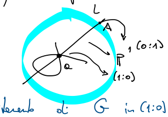


il punto Q corrisp. alla coppia $(\bar{\lambda} : \bar{\mu}) = (1 : 0)$

Sappiamo che $Q \in Z_p(F)$, quindi $(1:0)$ annulla $G(\lambda, \mu)$

$G(\lambda, \mu)$

Gli zeri di $G(\lambda, \mu)$ corrispondono a punti di $\mathbb{P}^1_K \cong \overline{QA}$



Mi interessa il comportamento di G in $(1:0)$
$\Rightarrow$ posso deomog. rispetto a λ:

$g(t) := G(1, t)$
La molt. della radice $(1:0)$ per $G(\lambda,\mu)$
= molt. della radice 0 per $g(t)$

$$g(t) = G(1,t) = F(q_0+ta_0,\ q_1+ta_1,\ q_2+ta_2)$$

Scrivo la Formula di Taylor in 0:

$$g(t) = \underbrace{g(0)}_{=0} + g'(0)\cdot t + \frac{g''(0)}{2}t^2 + \dots$$

$t=0$ è radice di molteplicità $\geq 2 \iff g'(0)=0$.

$$g'(t) = \partial_{x_0}F(q_0+ta_0, \dots, q_2+ta_2)\cdot a_0 + \partial_{x_1}F(q_i+ta_i)\cdot a_1 + $$
$$+ \partial_{x_2}F(q_i+ta_i)\cdot a_2$$

$$g'(0) = \partial_{x_0}F(q_0,q_1,q_2)\cdot a_0 + \partial_{x_1}F(q_0,q_1,q_2)\cdot a_1 + $$
$$+ \partial_{x_1}F(q_0,q_1,q_2)\cdot a_2$$

$$\boxed{= {}^t\nabla F(Q)\cdot\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0} \quad ⊛$$

Quindi: Q è singolare $\iff$ per ogni punto $A \in \mathbb{P}^2 - \{Q\}$, vale ⊛

Affermo: $\iff \nabla F(Q) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Infatti: se per assurdo $\nabla F(Q) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

se cons. ${}^t\nabla F(Q) \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$

polinomio lineare non nullo
omogeneo

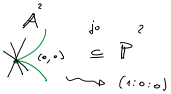
i suoi zeri costituiscono una retta, e non tutto il piano $\mathbb{P}^2 \setminus \{Q\}$

Abbiamo quindi dimostrato:

PROPOSIZIONE: $Q \in Z_p(F)$ è singolare $\Longleftrightarrow \nabla F(Q) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Esempi:

① $y^2 - x^3 = 0$



$\underbrace{x_0 x_2^2 - x_1^3}_{=F} = 0$ chiusura proiettiva

$\nabla F(x_0, x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_2^2 \\ -3x_1^2 \\ 2x_0x_2 \end{pmatrix}$

$\nabla F(1,0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

② $x^3 + x^2 - y^2 = 0$ $(0,0)$ è singolare

verifica diretta: $y = tx$ retta per $(0,0)$

$\begin{cases} x^3 + x^2 - t^2x^2 = 0 \\ y = tx \end{cases}$: $x^2(x + 1 - t^2) = 0$

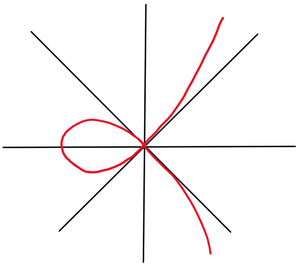
$\Rightarrow x = 0$ è radice di molt. 2

Con il criterio proiettivo:

$\underbrace{x_1^3 + x_0 x_1^2 - x_0 x_2^2}_{=F} = 0$

$\nabla F = \begin{pmatrix} x_1^2 - x_2^2 \\ 3x_1^2 + 2x_0x_1 \\ -2x_0x_2 \end{pmatrix}$

$\nabla F(1,0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (1:0:0)$ è singolare



Ricerca di punti singolari: caso affine:

$C = (Z(f), f)$, $Z(f) \subseteq \mathbb{A}^2_K$, $f = f(x_1, x_2) \in K[x_1, x_2]$

$q \in Z(f)$ è singolare $\Longleftrightarrow$ $\forall$ retta affine

ℓ passante per q, si ha $I(q, C, \ell) \geq 2$

$q = (q_1, q_2)$

$\Longleftrightarrow$ il punto $\underset{= Q}{j_0(q)} \in Z_p(hf) \subseteq \mathbb{P}^2$

$= (1 : q_1 : q_2)$

è singolare

Poniamo $F = hf = x_0^{\deg f} \cdot f\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right)$; ricordo che $a(hf) = f$

$= (hf)(1, x_1, x_2) = F(1, x_1, x_2)$

$$Q \text{ sing. per } Z_p(F) \Longleftrightarrow \nabla F(Q) = \begin{pmatrix} \partial_{x_0} F(Q) \\ \partial_{x_1} F(Q) \\ \partial_{x_2} F(Q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vogliamo esprimere $\nabla F(Q)$ in termini di $\nabla f(q)$

Osserviamo che: $(\partial_{x_1} F)(1, x_1, x_2) = \partial_{x_1}(F(1, x_1, x_2))$

$(\partial_{x_2} F)(1, x_1, x_2) = \partial_{x_2}(F(1, x_1, x_2))$

Quindi: $(\partial_{x_1} F)(Q) = (\partial_{x_1} f)(q)$

$(\partial_{x_2} F)(Q) = (\partial_{x_2} f)(q)$

Deduciamo dunque

Q singolare per $Z_p(hf)$ $\rightarrow$ $q = j_0^{-1}(Q)$ annulla $\nabla f = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f \\ \partial_{x_2} f \end{pmatrix}$

Affermiamo che vale anche il viceversa:

Supponiamo che $q \in Z(f)$ soddisfi $\nabla f(q) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Abbiamo visto che si ha allora $\partial_{x_1} F(1, q_1, q_2) = 0 = \partial_{x_2} F(1, q_1, q_2)$

Dobbiamo verificare che vale anche

$(\partial_{x_0} F)(1, q_1, q_2) = 0$

Usiamo la Formula di Eulero: $Q = (1 : q_1 : q_2)$

$$(\deg F) \cdot F = x_0 \partial_{x_0} F + x_1 \partial_{x_1} F + x_2 \partial_{x_2} F$$

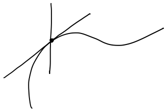
$$\underset{= 0}{(\deg F) \cdot F(Q)} = 1 \cdot \partial_{x_0} F(Q) + q_1 \underbrace{\partial_{x_1} F(Q)}_{\substack{= \partial_{x_1} f(q) \\ = 0}} + q_2 \underbrace{\partial_{x_2} F(Q)}_{\substack{= \partial_{x_2} f(q) \\ = 0}}$$

$\Rightarrow \partial_{x_0} F(Q) = 0 \Rightarrow Q$ è singolare per $Z_p(F)$.

COROLLARIO: $q \in Z(f) \subseteq \mathbb{A}^2_K$ è singolare $\Longleftrightarrow$ $\nabla f(q) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

PUNTI NON SINGOLARI (o LISCI):

$Q \in Z_p(F)$ non è singolare $\Longleftrightarrow$ $\nabla F(Q) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$



Q non singolare $\Longleftrightarrow$ non tutte le rette L per Q
$Q \in Z_p(F)$ verificano $I(Q, Z_p(F), L) \geq 2$

$\Rightarrow$ $\exists$ almeno una retta con $I(Q, Z_p(F), L') = 1$
$Q \in L'$

Ricordo: L si dice tangente a $Z_p(F)$ in Q, con Q non singolare, $\Longleftrightarrow$ $I(Q, Z_p(F), L) \geq 2$

$$F(\lambda q_0 + \mu a_0, \lambda q_1 + \mu a_1, \lambda q_2 + \mu a_2) = G(\lambda, \mu)$$

$$g(t) = G(1, t)$$

$$g(t) = g(0) + \underbrace{g'(0)}_{= {}^t\underbrace{\nabla F(Q)}_{\neq 0} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}} \cdot t + \frac{1}{2} g''(0) \cdot t^2 + \cdots$$

una retta $\overline{QA}$ ha molt. di $\cap$ in Q
≥ 2 $\Longleftrightarrow$ la terna $\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ verifica

$${}^t\nabla F(Q) \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0 \quad ; \quad \text{oss. che}$$

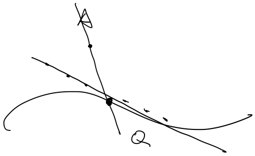
$${}^t\nabla F(Q) \cdot \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = q_0 \partial_{x_0} F(Q) + q_1 \partial_{x_1} F(Q) + q_2 \partial_{x_2} F(Q) = 0$$

$$= (\deg F) \cdot \underbrace{F(Q)}_{= 0}$$

$$\Rightarrow \quad A, Q \in \text{retta} = Z_p\left({}^t\nabla F(Q) \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right)$$

$$A \neq Q$$

$\Longrightarrow$ $\overline{QA}$ ha eq $\partial_{x_0}F(Q)\cdot x_0 + \partial_{x_1}F(Q)\cdot x_1 + \partial_{x_2}F(Q)\cdot x_2 = 0$



Prop: Se $Q \in Z_p(F)$ non singolare,

$\exists!$ retta tg in Q : $\tau_Q \mathcal{C}$

$\mathcal{C} = (Z_p(F), F)$.

CASO AFFINE :

$Q \in U_0$, $Q = (1 : q_1 : q_2)$ non singolare

la tg a $C = (Z(aF), aF)$

in $q = (q_1, q_2)$:

$$a\left(\partial_{x_0}F(Q)\overset{=1}{x_0} + \partial_{x_1}F(Q)\,x_1 + \partial_{x_2}F(Q)\,x_2\right) = 0$$

$$= \partial_{x_1}f(q_1,q_2)\,x_1 + \partial_{x_2}f(q_1,q_2)\,x_2$$

$$\partial_{x_0}F(Q) = (\partial_{x_0}F)(1, q_1, q_2) = -q_1\,\partial_{x_1}f(q_1,q_2) - q_2\,\partial_{x_2}f(q_1,q_2)$$

↓
Eulero

$$\left(-q_1\,\partial_{x_1}f(q_1,q_2) - q_2\,\partial_{x_2}f(q_1,q_2)\right) + \partial_{x_1}f(q)\,x_1 + \partial_{x_2}f(q)\,x_2 = 0$$

$$\boxed{\partial_{x_1}f(q_1,q_2)(x_1 - q_1) + \partial_{x_2}f(q_1,q_2)(x_2 - q_2) = 0}$$

retta tg.