Lezione 17 ottobre 2023

martedì 17 ottobre 2023 09:14

Visto: caratt. di punti singolari e rette tg.

Cons. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Def.: Sia $C = (Z(f), f)$ curva affine,

cons. $\bar{C} = (Z_p(hf), hf)$ chiusura proiettiva

e sia $P_\infty \in Z_p(hf) \cap \underbrace{Z_p(x_0)}_{= L_\infty}$

"retta all'∞"

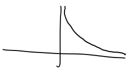
Se P_∞ è un punto non singolare e

$\mathcal{E}_{P_\infty} Z_p(hf)$ è $\neq$ $Z_p(x_0)$

ed è una RETTA REALE (cioè ha infiniti punti reali), allora

$(\mathcal{E}_{P_\infty} Z_p(hf)) \cap U_0$ si chiama

ASINTOTO di C nel punto P_∞.



OSS. Visto FORMULA DI EULERO:

$F \in \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]$ omogeneo, $\deg F \geq 1$

$$(\deg F) \cdot F = \sum_{i=0}^{2} x_i \cdot \partial_{x_i} F = x_0 \partial_{x_0} F + x_1 \partial_{x_1} F + x_2 \partial_{x_2} F$$

$\deg F = n$

$$n \cdot \partial_{x_0} F = \partial_{x_0} F + x_0 \partial_{x_0 x_0} F + x_1 \partial_{x_0 x_1} F + x_2 \partial_{x_0 x_2} F$$

$$(n-1)\, \partial_{x_0} F = \sum_{i=0}^{2} x_i\, \partial_{x_0 x_i} F$$

$$n\,(n-1)\, F = \sum_{i,j=0}^{2} x_i\, x_j\, \partial_{x_i x_j} F$$

In particolare: se un punto annulla tutte le derivate parziali seconde, annulla anche tutte le derivate parz. prime e F.

Def.: Un punto singolare $Q \in Z_p(F)$

si dice SINGOLARE DI ORDINE $k \geq 2$

o di MOLTEPLICITÀ k se Q annulla

tutte le derivate parziali F di ordine $k-1$

e non tutte quelle di ordine k.

Def.: Se $k = 2$, Q si dice DOPPIO

$k = 3$, Q si dice TRIPLO.

OSS.: Questa def. è equivalente a dire che: quasi tutte le rette per Q (ad eccezione di un # finito di rette) ha

$$I(Q, Z_p(F), L) = k.$$

ANCORA SUI PUNTI MULTIPLI

Supp. d'ora in poi $^{\text{Supp.}}$ che $Q = (1:0:0)$

$Q \in Z_p(F) \cap U_0$ è in biiezione $Z(aF) \subseteq \mathbb{A}^2$

$\varphi_0(Q) = q = (0,0)$

$\varphi_0 : U_0 \to \mathbb{A}^2$

$f(x,y) = aF = F(1,x,y)$

$$f(x,y) = f_0(x,y) + f_1(x,y) + f_2(x,y) + f_3(x,y) + \dots + f_n(x,y)$$

$f_i(x,y)$ è omogeneo di grado i

$f(0,0) = 0 \implies f_0(x,y) = 0$

q è singolare $\iff$ ogni retta $l \subseteq \mathbb{A}^2$ per $(0,0)$ ha mol. int. ≥ 2.

l per $(0,0)$: $y = mx$

$Z(f) \cap l$: $\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ y = mx \end{cases}$

$$\begin{cases} f(x,mx) = 0 \\ y = mx \end{cases} \qquad \begin{cases} \overset{=\alpha_1 \cdot x}{f_1(x,mx)} + \overset{\alpha_2 \cdot x^2}{f_2(x,mx)} + \overset{\alpha_3 \cdot x^3}{f_3(x,mx)} + \dots + \overset{\alpha_n \cdot x^n}{f_n(x,mx)} = 0 \\ y = mx \end{cases}$$

$I(q, Z(f), l) \geq 2 \iff x = 0$ ha molt. ≥ 2

$\iff \alpha_1 = 0$

$\iff f_1(x,y) = 0$

$$l: \begin{cases} x = \alpha t \\ y = \beta t \end{cases}$$

$$f(\alpha t, \beta t) = f_1(\alpha t, \beta t) + f_2(\alpha t, \beta t) + \dots + f_n(\alpha t, \beta t)$$

$$f_1(x,y) = a_0 x + a_1 y$$

$$f_1(\alpha t, \beta t) = a_0 \alpha t + a_1 \beta t = (a_0 \alpha + a_1 \beta) t$$

$t=0$ radice doppia $\forall \ell$

$\iff \forall(\alpha,\beta) \quad a_0\alpha + a_1\beta = 0$

$\iff a_0 x + a_1 y \equiv 0$

$\underline{o}=(0,0)$ è singolare $\iff f(x,y) = f_2(x,y)+f_3(x,y)+\dots+f_n(x,y)$

Supp. $k=2$, $\underline{o}$ punto doppio

$f_2(x,y) \neq 0$

Vediamo se ci sono rette che hanno molt. di int. > 2:

$$\ell: \begin{cases} x=\alpha t \\ y=\beta t \end{cases}$$

$$\underbrace{f(x,y)=f_2(x,y)+f_3(x,y)+\dots+f_n(x,y)}$$

$$f(\alpha t,\beta t)=$$

$$f_2(x,y)=a_0x^2+a_1xy+a_2y^2$$

$$f_2(\alpha t,\beta t)=(a_0\alpha^2+a_1\alpha\beta+a_2\beta^2)t^2$$

ℓ ha molt. di int. ≥ 3 $\iff$ (α,β) soddisf.:

$$a_0\alpha^2+a_1\alpha\beta+a_2\beta^2=0$$

$$\boxed{a_0x^2+a_1xy+a_2y^2=0}$$

su $\mathbb{C}$: questo polinomio fattorizza sempre nel prodotto $(\beta_1 x-\alpha_1 y)(\beta_2 x-\alpha_2 y)$ con radice $(\alpha_1:\beta_1)$ e $(\alpha_2:\beta_2)$

$(\alpha:\beta)$ $\qquad a_0\alpha^2 + a_1\alpha\beta + a_2\beta^2 = 0$

$$\begin{cases} x = \alpha t \\ y = \beta t \end{cases} \qquad \begin{cases} \beta x = \alpha\beta t \\ \alpha y = \alpha\beta t \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \beta x = \alpha y \quad , \quad \beta x - \alpha y = 0$$

per coppie proporzionali a $(\alpha:\beta)$ trovo sempre la stessa retta.

Def: $Z(f_2(x,y))$ si chiama CONO TANGENTE nel punto doppio $\underline{0}$

e ogni retta, luogo degli zeri di un fattore lineare, si chiama tg nella singolarità.

Def: • Se $f_2(x,y) = (\beta x - \alpha y)^2$, $\underline{0} = (0,0)$ si dice CUSPIDE

• Se $f_2(x,y) = (\beta_1 x - \alpha_1 y)\cdot(\beta_2 x - \alpha_2 y)$

$$(\alpha_1 : \beta_1) \neq (\alpha_2 : \beta_2),$$

allora $\underline{0} = (0,0)$ si dice NODO ORDINARIO

Esempi: ① $f(x,y) = y^2 - x^3 = 0$

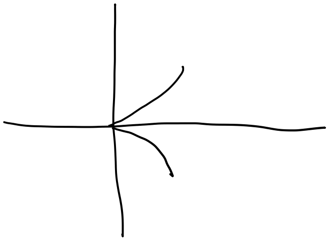
non ha termine lineare $\Rightarrow$ $(0,0)$ è singolare

il termine di secondo grado c'è $\Rightarrow$ $(0,0)$ è doppio

Per trovare cono tg in $(0,0)$: $\quad y^2 = 0$

$y \cdot y$

$\Longrightarrow$ 1 tg. di eq: $y = 0$

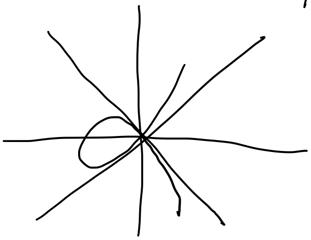


② $f(x,y) = x^3 + x^2 - y^2 = 0$

$(0,0)$ è singolare, è doppio

cono tg: $x^2 - y^2 = 0$

$$(x-y)(x+y) = 0 \quad \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$



$\Longrightarrow$ $(0,0)$ è nodo

In generale: $(0,0)$ singolare di molt. k

$\Longleftrightarrow$ $f(x,y) = f_0 + f_1(x,y) + f_2(x,y) + f_3(x,y) + \dots + f_n(x,y)$

$f_i(x,y) = 0 \quad \forall \ i \leq k-1$

e le rette che $I(\underline{q}, Z(f), \ell) \geq k+1$

hanno eq. cartesiana che è un fattore lineare

$$\boxed{f_k(x,y) = 0 \ : \ \text{CONO TG in } \underline{q}}$$

Sono al più k

Def.: Se i k fattori lineari di $f_k(x,y)$ sono tutti diversi, $\underline{q} = (0,0)$ si dice SINGOLARITÀ ORDINARIA