FUNZIONI DA $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$

Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, \dots, f_m)$

f si dice di classe C^1 se esistono le derivate parziali $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ $\quad i = 1, \dots, m$ $\quad j = 1, \dots, n$

La matrice

$$Jf(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}^{m \times n}$$

si dice Jacobiana di f.

Si ha che

$$f(x^0 + h) = f(x_0) + Jf(x_0)\, h + R(\|h\|)$$

con $\dfrac{R(s)}{s} \xrightarrow{s \to 0} 0$

Se $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $g : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$

e se f, g sono C^1, si ha che

$$J(g \circ f)(x) = Jg(f(x))\, Jf(x)$$

prodotto righe per colonne.

Teorema della funzione inversa

Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ di classe C^1.

Sia $\det Jf(x_0) \neq 0$. Allora

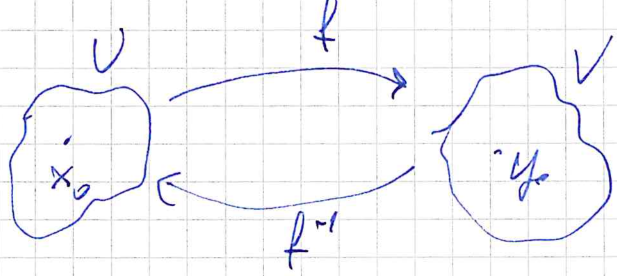
esiste U intorno aperto di x_0,

$\exists$ V intorno aperto di $y_0 = f(x_0)$

ed $\exists$ $f^{-1}: V \to U$ di classe C^1,

e

$$Jf^{-1}(y) = (Jf)^{-1}(f^{-1}(y)) \quad \forall y \in V$$



TEOREMA DELLA FUNZIONE IMPLICITA

Sia $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1

Sia $x^0 = (x^0_1, \dots, x^0_n) \in \Omega$ t.c.

a) $f(x^0) = 0$

b) $\nabla f(x^0) \neq 0$ (assumiamo per esempio $\frac{\partial f}{\partial x_n}(x^0) \neq 0$)

Allora esiste un intorno U di $(x^0_1, \dots, x^0_{n-1})$ in $\mathbb{R}^{n-1}$ e un intorno V di x^0_{n-1} in $\mathbb{R}$, ed esiste $\varphi: U \to V$ di classe C^1 t.c. $\forall (x_1, \dots, x_n) \in U \times V$ si ha

$$f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = 0 \iff x_n = \varphi(x_1, \dots, x_{n-1})$$

Esempio

$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$

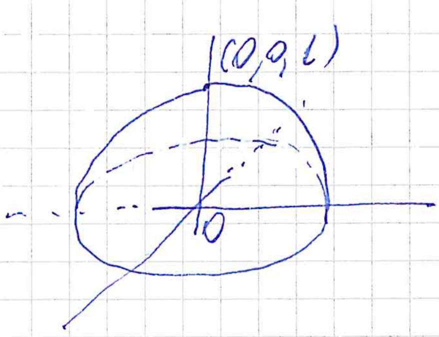
Sia $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 1)$

$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = (2x, 2y, 2z)$

$\nabla f(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$

$\Rightarrow$ posso esprimere z in funzione di (x, y) vicino a $(0, 0)$

$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$



Se $n = 2$ ho le curve di livello

Se $n = 3$ ho le superfici di livello.