Se il piano α è perpendicolare a π_1, ha la seconda traccia t_a, perpendicolare ad l; analogamente un piano β, perpendicolare a π_2, ha la prima traccia s_a perpendicolare ad l (figg. 17a e 17b); α e β diconsi *piani proiettanti* (in quanto mediante piani di questo tipo si ottengono le proiezioni di una retta) *rispettivamente in prima e in seconda proiezione.* Se il piano è perpendicolare sia a π_1 che a π_2 (piano di profilo), le tracce coincidono in una retta perpendicolare ad l (cfr. fig. 13a).

Se infine il piano α passa per la linea di terra l, le tracce coincidono con l e non individuano il piano α: questo infatti ha la retta l in comune con tutti i piani del fascio di asse l; per individuare un tale piano occorre assegnarne un ulteriore punto non appartenente ad l.

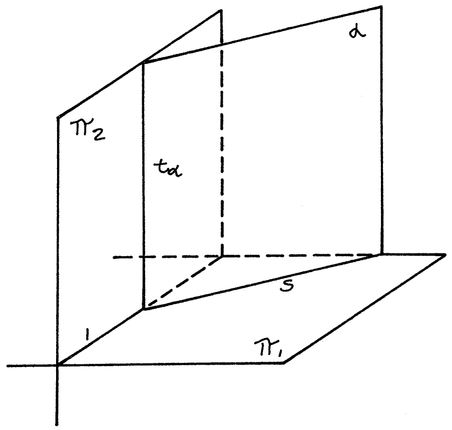

Fig. 17a

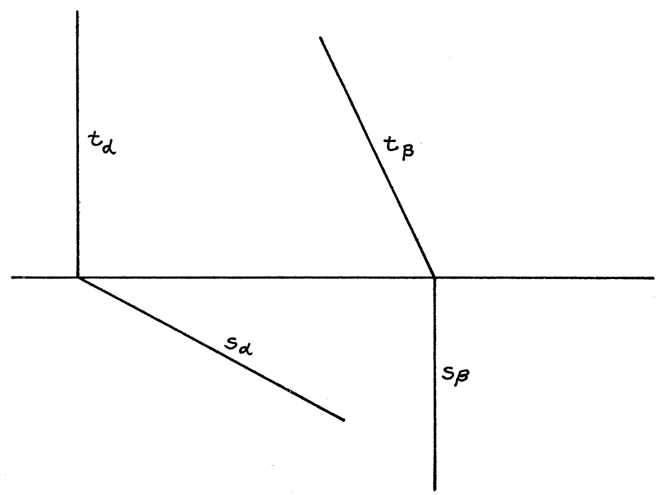

Fig. 17b

Il simbolo $\alpha(s_a, t_a)$ denota la rappresentazione di un piano α mediante le tracce s_a, t_a.

22. Condizioni di appartenenza

Poiché la prima (seconda) immagine r' (r'') di una retta r è la proiezione ortogonale di r su π_1 (π_2), evidentemente la prima immagine P′ (la seconda immagine P″) di ciascun punto P di r appartiene ad r' (r'').

Ne consegue che:

Un punto appartiene ad una retta se e solo se le immagini del punto appartengono alle immagini omonime della retta.

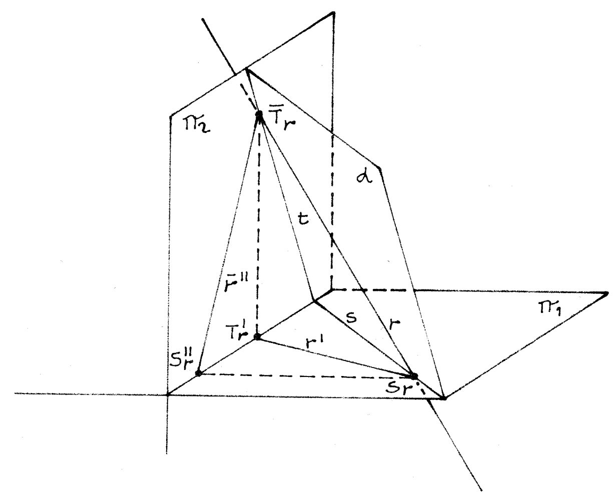

Fig. 18a

Se una retta r appartiene ad un piano $\alpha(s_a, t_a)$, essa interseca π_1 e π_2 rispettivamente in un punto di s_a e in un punto di t_a: tali punti sono le tracce S_r e T_r della retta r. Viceversa, se una retta r (r', r'') è tale che S_r appartiene ad s_a e T_r appartiene a t_a, essa, avendo in comune con α due punti, S_r e T_r, giace su α (figg. 18a e 18b).

S

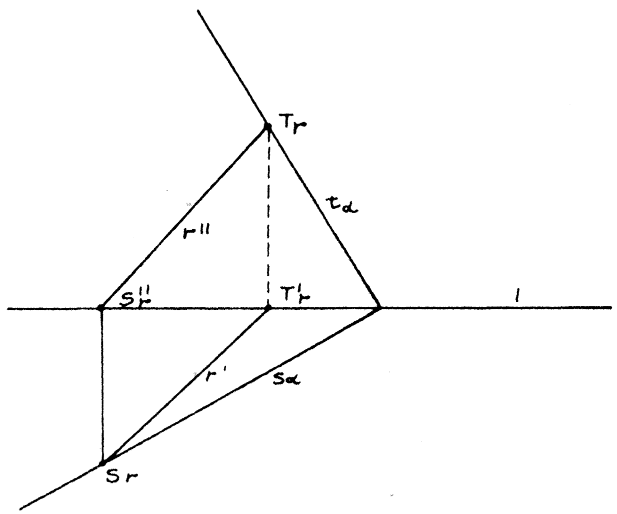

Fig. 18b

Dunque:

Una retta appartiene a un piano se e solo se le tracce della retta appartengono alle tracce omonime del piano.

Per assegnare le immagini di una retta r di un piano α (s_a, t_a) si sceglie un punto T_r su t_a e se ne determina la prima proiezione T'_r sulla linea di terra l; si sceglie ancora un punto S_r su s_a e se ne determina la seconda proiezione S''_r su l: le immagini r' ed r'' sono, nell'ordine, le rette che congiungono T'_r con S_r e T_r con S''_r (fig. 18b).

Se viceversa sono date una retta r (r', r'') e la rappresentazione di α, per verificare se la retta r appartiene o non ad α, se ne determinano le tracce S_r e T_r: se una almeno risulta esterna alla traccia omonima del piano, la retta r è esterna ad α e, viceversa.

Ogni retta orizzontale o, appartenente ad un piano α, ha la seconda traccia T_0 su t_a e la prima coincidente col punto improprio di s_a; analogamente ogni retta di fronte f, appartenente ad un piano β, ha la seconda immagine f'' parallela a t_β (figg. 19a e 19b).

Ogni retta r (s) appartenente ad un piano α (s_a, t_a), proiettante in prima proiezione (in seconda proiezione), ha la prima (seconda) imma-

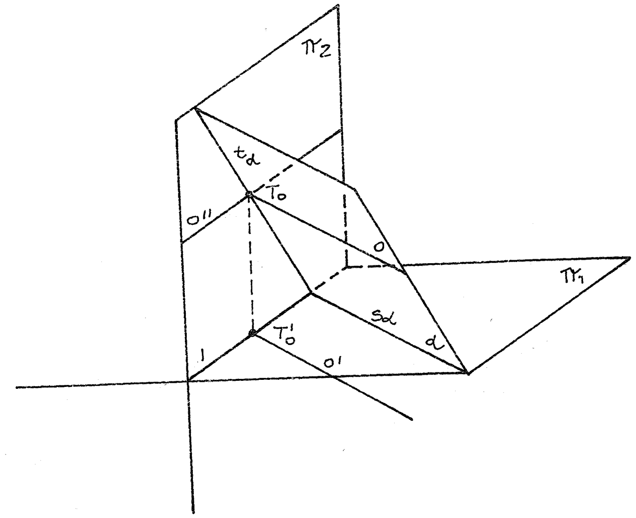

Fig. 19a

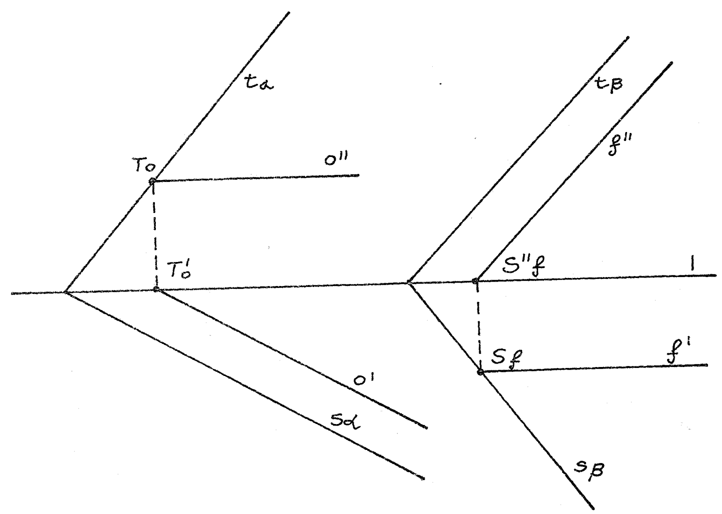

Fig. 19b

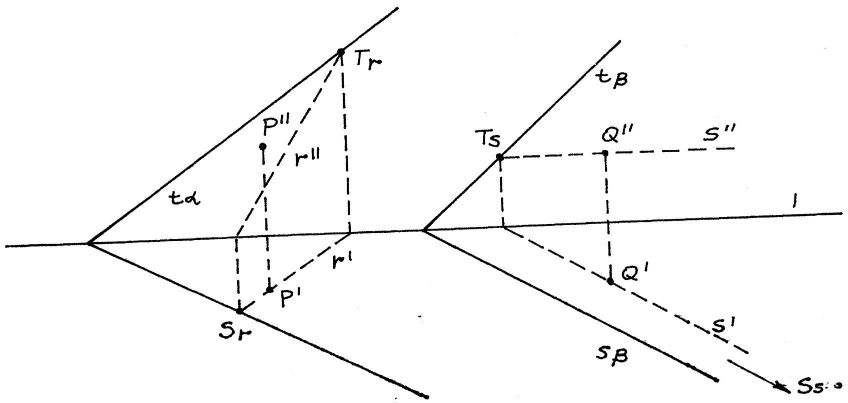

Fig. 20

gine coincidente con s_a (t_a) (fig. 21).

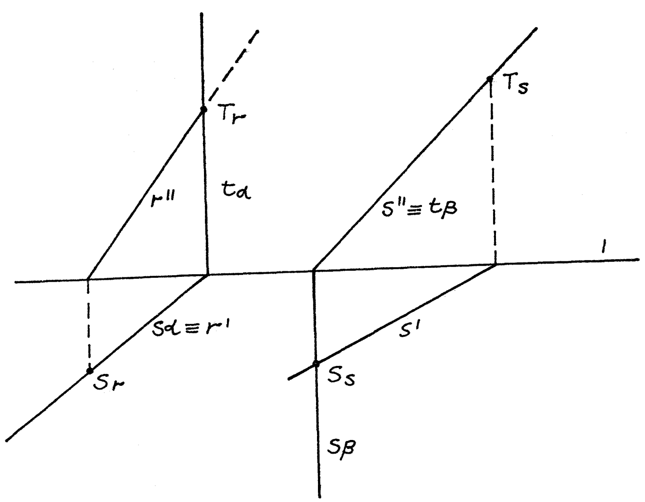

Fig. 21

Nella fig. 22 sono rappresentate inoltre una retta h perpendicolare a π_1, appartenente ad un piano α (evidentemente anch'esso perpendicolare a π_1) e una retta k perpendicolare a π_2, appartenente a un piano β (perpendicolare a π_2). Nella fig. 23 sono rappresentate una retta orizzontale

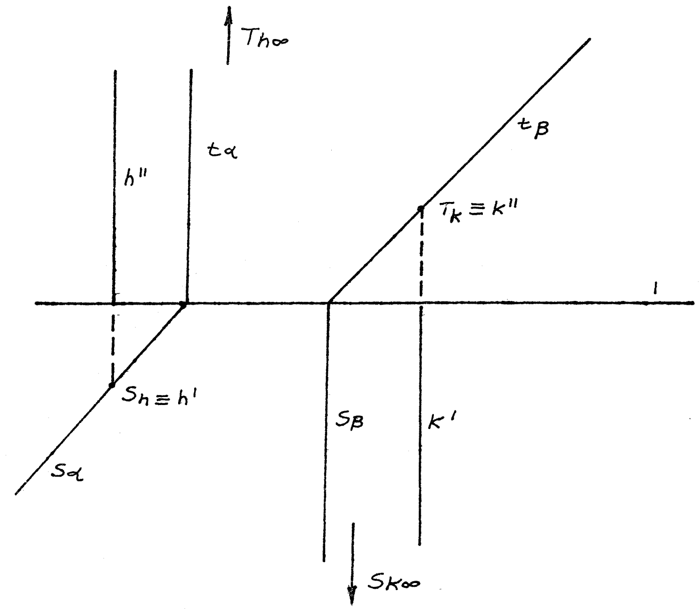

Fig. 22

o (o', o'') e una retta di fronte f (f', f''), appartenenti a due piani α e β perpendicolari rispettivamente a π_1 e π_2.

Un punto P (P', P'') *sta sul piano* α (s_a, t_a) *se e solo se esiste una retta* r *passante per* P *e giacente in* α.

Per verificare se un punto P (P', P'') appartiene al piano $\alpha(s_a, t_a)$, si conduca per P' una qualsiasi retta r' e si determini la retta r'' imponendo la condizione che r (r', r'') sia una retta di α: se r'' passa per P'', il punto P appartiene ad r e quindi ad α; in caso contrario, il punto è esterno ad α. Per rappresentare dunque un punto Q appartenente ad un piano β, basta assegnarne una delle immagini, ad es. Q', e determinare Q'' come punto comune alla retta di richiamo passante per Q' e alla seconda immagine s'' di una retta s di β, la cui prima immagine s' passi per Q' (fig. 20). In particolare, ci si può servire della retta orizzontale $s(s', s'')$

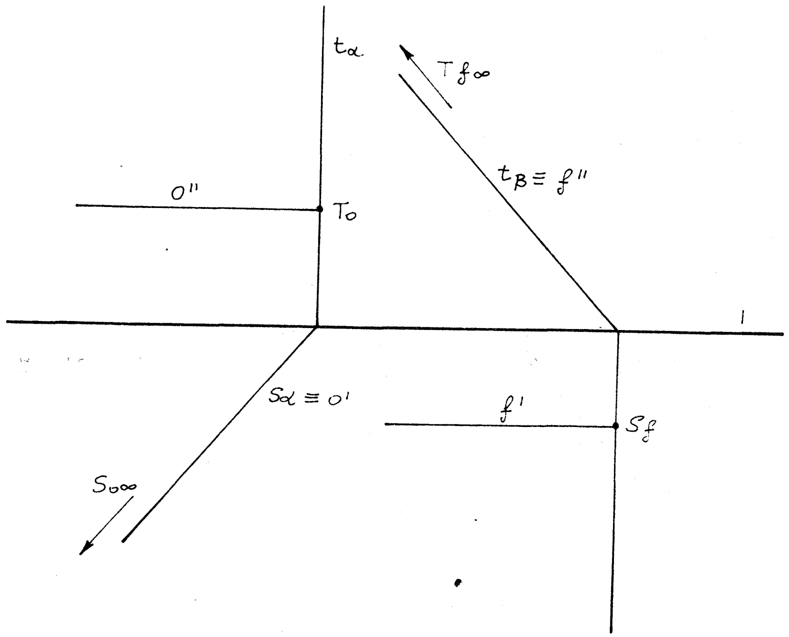

Fig. 23

di β, passante per Q. Se il piano α è proiettante in prima proiezione (in seconda proiezione), la prima immagine P′ (la seconda P″) appartiene alla prima traccia (seconda traccia) di α.

23. Problemi grafici. Intersezioni

Come è noto (cfr. III, n. 3), i problemi grafici sono quelli relativi ad intersezioni e appartenenza. In questo numero ci occuperemo dei primi.

23.1. Retta comune a due piani

Dati due piani generici: α (s_a, t_a) e β (s_β, t_β), la retta x, comune ai due piani, per le condizioni di appartenenza ad α ed a β, ha la prima traccia simultaneamente su s_a e su s_β: S_x è dunque il loro punto comune; analogamente la seconda traccia T_x è il punto comune t_a e t_β (fig. 24).

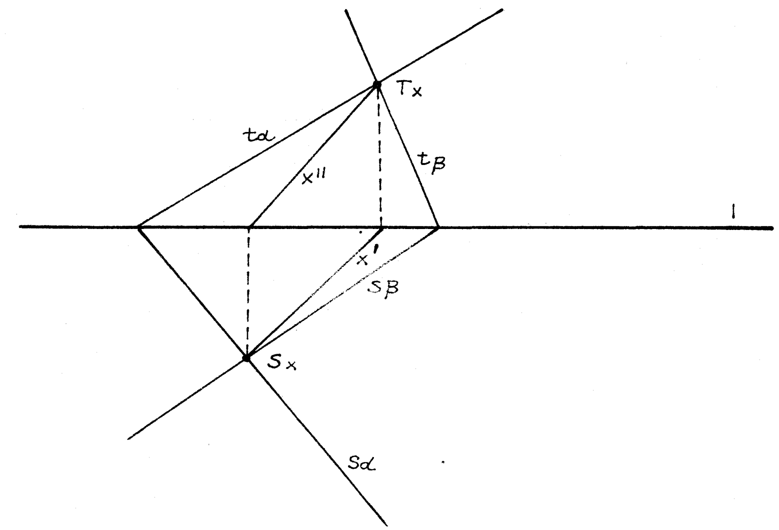

Fig. 24

Nella fig. 25 è rappresentata la retta x, intersezione di un piano generico α e un piano β proiettante in prima proiezione. Nelle figure 26, 27, 28 è rappresentata la retta x, rispettivamente quando: α è generico e β parallelo ad l; α è proiettante in prima proiezione e β parallelo ad l; α è generico e β parallelo a π_1.

Supponiamo ora che α (s_a, t_a) sia un piano generico, e β_1 il primo piano bisettore: β_1 ha le tracce coincidenti con l e ogni suo punto ha le immagini simmetriche rispetto ad l (cfr. n. 19, figg. 5a e 5b). Per determinare la retta x comune ad α e β_1, si individuano due punti di tale retta, uno dei quali è il punto $T_x \equiv S_x$ comune alle tracce di α e di β_1,