omonime di $r$: basta dunque di una di esse, ad es. di $t_a$, determinare un solo punto proprio, essendone già nota la direzione. Si conduca per P la retta orizzontale $o$ appartenente al piano $\alpha$: la prima immagine $o'$, dovendo risultare parallela alla prima traccia $s_a$ di $\alpha$ che si vuol costruire, a sua volta perpendicolare ad $r'$, è la perpendicolare ad $r'$ per P$'$. Determinata la seconda traccia $T_o$ della retta $o$, la seconda traccia $t_a$ di $\alpha$, è la perpendicolare ad $r''$ per $T_o$, e la prima traccia $s_a$ è la perpendicolare ad $r'$ condotta per il punto comune a $t_a$ ed $l$ (fig. 47).

25.3. Piano per una retta e perpendicolare a un dato piano

Data una retta $r$ ($r'$, $r''$) e un piano $\alpha$ ($s_a$, $t_a$) non perpendicolari, il piano $\beta$, passante per $r$ e ortogonale ad $\alpha$, contiene una retta $n$, ortogo-

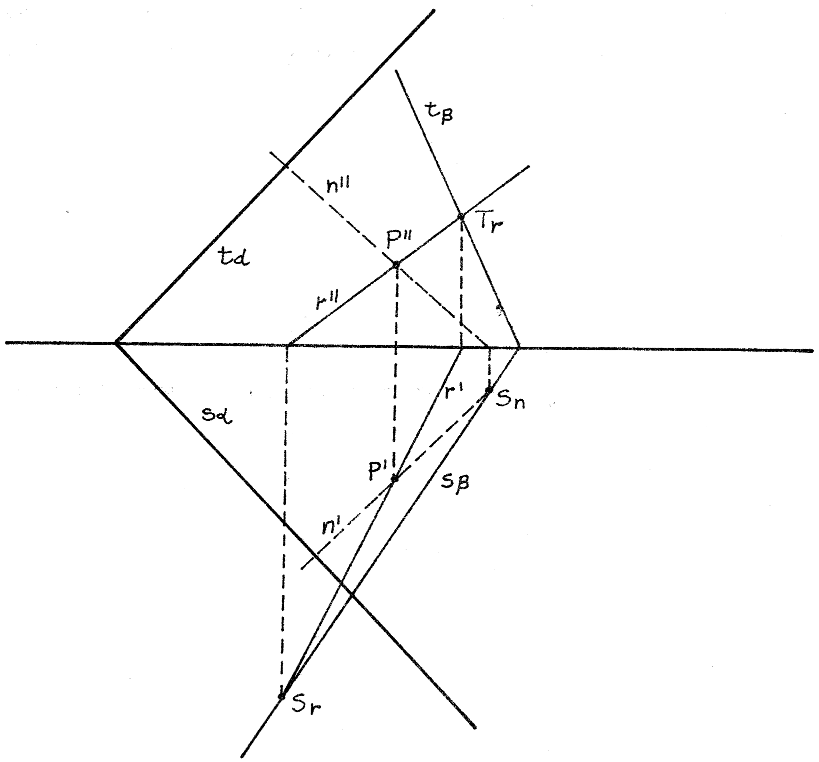


Fig. 48



nale ad $\alpha$ e complanare con $r$. Scelto allora un punto P (P$'$, P$''$) sulla retta $r$ e costruita per P la retta $n$ ($n'$, $n''$) perpendicolare ad $\alpha$, il piano $\beta$ richiesto è quello individuato dalle rette $r$ ed $n$ (cfr. 24.3.) (fig. 48).

## 26. Il ribaltamento (piano proiettante)

Come è noto, il ribaltamento di un piano consente di risolvere i problemi metrici, ed in particolare di determinare la vera forma e grandez-

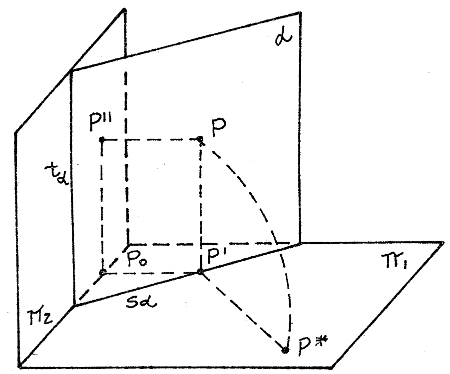


Fig. 49

za di una figura piana di cui si conosca la rappresentazione; consente inoltre di costruire le immagini di una figura piana di cui si conoscano la vera forma e il piano cui appartiene.

Anche nel metodo di Monge, come in quello delle Proiezioni Centrali, si preferisce, ove possibile, far uso di piani proiettanti.

Dato dunque un piano $\alpha$ ($s_a$, $t_a$), proiettante in prima proiezione, il ribaltato P* di un punto P di $\alpha$ è sulla perpendicolare ad $s_a$ condotta per il punto P$'$, prima immagine di P, ad una distanza da $s_a$ uguale alla quota di P, vale a dire alla misura del segmento $|P''P_o|$ (figg. 49 e 50).

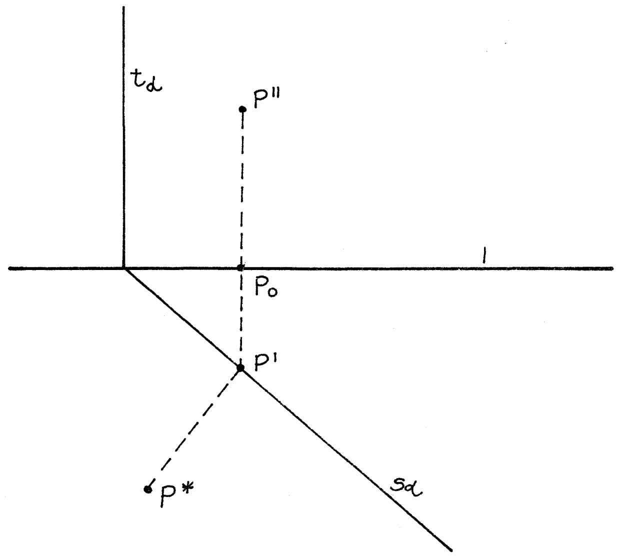


Fig. 50

## 26.1. Distanza di due punti

Dati due punti A (A$'$, A$''$) e B (B$'$, B$''$), per determinare la misura del segmento $\overline{\mathrm{AB}}$ (cioè la distanza dei due punti), si ribalta il piano $\gamma\,(s_\gamma,\, t_\gamma)$

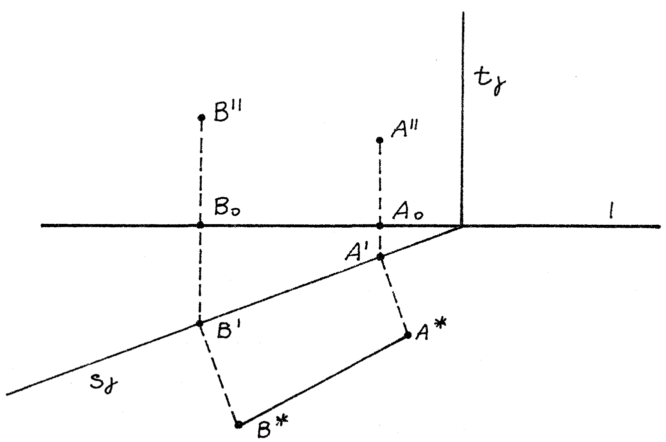


Fig. 51



per $\overline{\mathrm{AB}}$ e proiettante in prima proiezione, la cui prima traccia $s_\gamma$ passa per A$'$ e B$'$. Determinati i ribaltati A* e B* di A e di B, la misura del segmento $\overline{\mathrm{A^*B^*}}$ fornisce la distanza richiesta (fig. 51).

## 26.2. Angoli di una retta con i piani di proiezione

Data una retta $r\,(r',\, r'')$ non perpendicolare al primo piano di proiezione, l'angolo $\varphi$ che essa forma con $\pi_1$ è uguale all'angolo che $r$ forma con $r'$, proiezione ortogonale di $r$ su $\pi_1$.

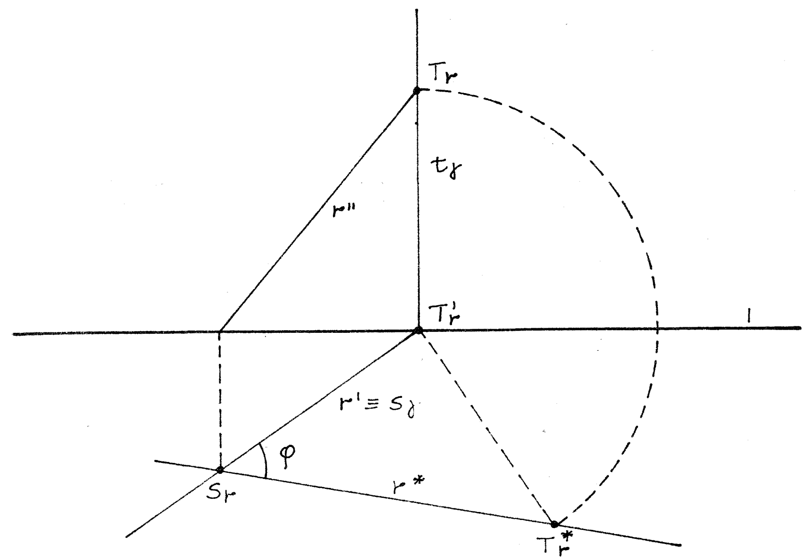


Fig. 52

Ribaltato il piano $\gamma\,(s_\gamma,\, t_\gamma)$ proiettante in prima proiezione e passante per $r$, la ribaltata $r^*$ di $r$ si determina mediante il ribaltamento di due suoi punti distinti: per esempio $\mathrm{S}_r$, prima traccia di $r$ (che resta fissa nel ribaltamento di $\gamma$ su $\pi_1$) e $\mathrm{T}_r$, seconda traccia di $r$.

Il punto $\mathrm{T}_r^*$ cade sulla perpendicolare ad $s_\gamma$ condotta per la prima immagine $\mathrm{T}_r'$ di $\mathrm{T}_r$, ad una distanza da $\mathrm{T}_r'$ uguale alla quota di $\mathrm{T}_r$ e si determina tracciando l'arco di cerchio con centro in $\mathrm{T}_r'$ e raggio $|\mathrm{T}_r\mathrm{T}_r'|$:

la retta $r^*$ passa per $S_r$ e $T_r^*$ e l'angolo $\varphi$ è quello non ottuso formato dalle rette $r'$ ed $r^*$ (fig. 52).

Analogamente si procede per determinare l'angolo $\psi$ che la retta $r$ forma con $\pi_2$: si ribalta su $\pi_2$ il piano $\delta$, passante per $r$ e proiettante in seconda proiezione, e si determina la ribaltata $r^*$ di $r$ su $\pi_2$, passante per $T_r$ e per il punto $S_r^*$, ribaltato della prima traccia $S_r$ (fig. 53).

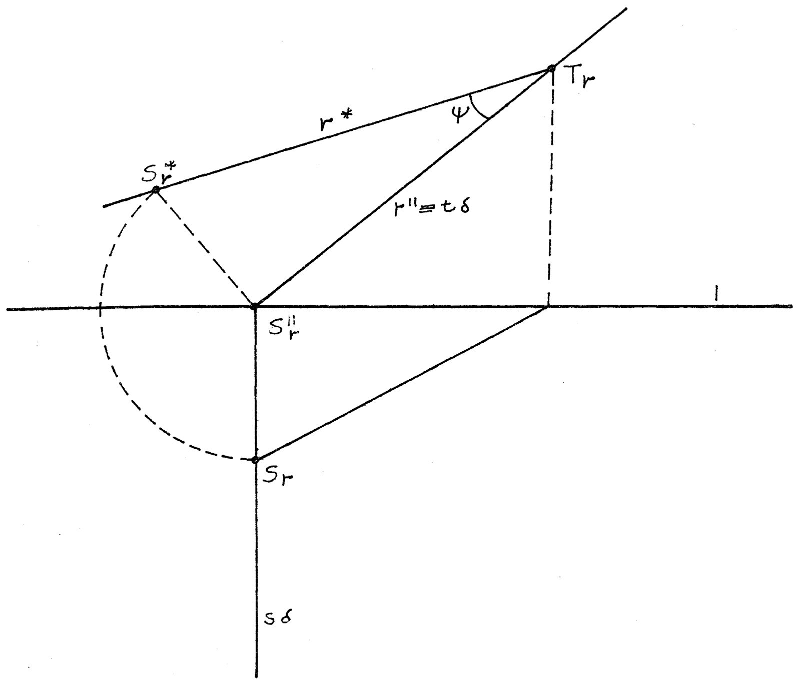


Fig. 53

## 26.3. Angoli di un piano con i piani di proiezione

Dato un piano $\alpha(s_a, t_a)$, l'angolo che $\alpha$ forma con $\pi_1$ è l'angolo $\varphi$ delle rette $r$ ed $r'$, che si ottengono secando $\alpha$ e $\pi_1$ con un qualunque piano $\gamma$ perpendicolare ad $\alpha$ e proiettante in prima proiezione (fig. 54).

Costruiti, dunque, il piano $\gamma$, con $s_\gamma$ perpendicolare ad $s_a$, e la retta $r\,(r', r'')$, intersezione di $\gamma$ con $\alpha$, il problema si riconduce alla determinazione dell'angolo che $r$ forma con $\pi_1$ (fig. 55).



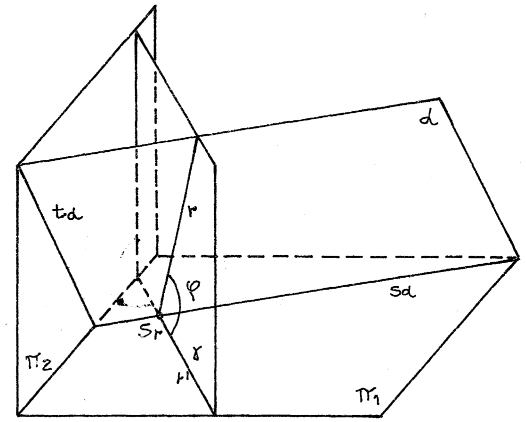


Fig. 54

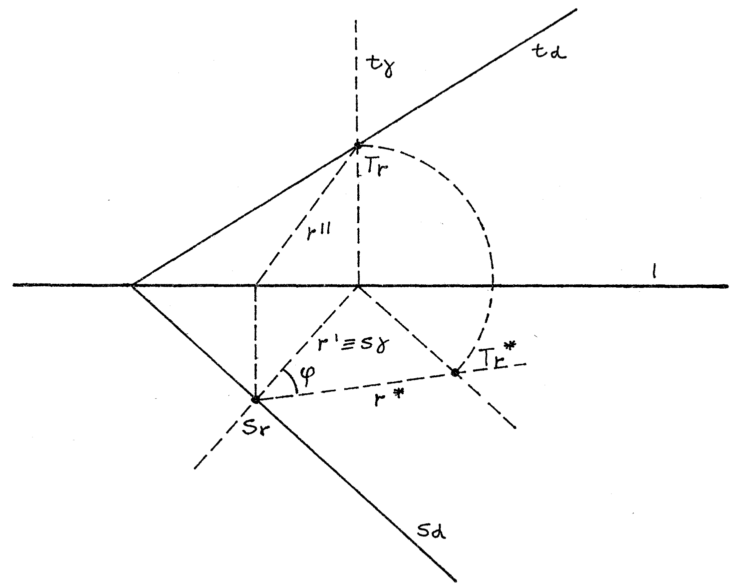


Fig. 55

$r$ e per $s$, e quindi determinando la distanza tra $\alpha$ e $\beta$ (cfr. 14.9, Cap. I).

Il piano $\alpha$ per $r$, dovendo risultare parallelo ad $s$, conterrà una retta $\bar{s}$ parallela ad $s$. Scelto dunque un punto su $r$, ad es. la seconda traccia $T_r$, si conducano per $T_r$ e per $T'_r$, le rette $\bar{s}''$ ed $\bar{s}'$ rispettivamente parallele ad $s''$ e ad $s'$ e, congiungendo le tracce omonime di $r$ e di $\bar{s}$, si costruiscano le tracce $s_a$ e $t_a$ di $\alpha$; infine, individuate le tracce di $s$, si costruisca il piano $\beta$ passante per $s$ e parallelo ad $\alpha$ (fig. 57).

Ricondotto così il problema alla determinazione della distanza tra i piani paralleli $\alpha$ e $\beta$, si proceda come nel caso precedente.

## 27. Distanza di un punto da un piano

Dati un piano $\alpha\,(s_a,\ t_a)$ e un punto P (P′, P″) non appartenente ad $\alpha$, la distanza tra P ed $\alpha$ è data dalla misura del segmento di perpendicolare condotto da P ad $\alpha$.

Il problema si risolve dunque conducendo da P la retta $n$ ortogonale ad $\alpha$ (cfr. 25.1), costruendo il punto Q, comune ad $n$ ed $\alpha$ (cfr. 23.2), e, infine, determinando la distanza tra i due punti P e Q (cfr. 26.1).

Nella fig. 58 sono eseguite le relative costruzioni sul foglio del disegno.

## 28. Ribaltamento (piano generico)

Nel metodo di Monge, il ribaltamento di un piano non proiettante, oltre alla determinazione della vera forma e grandezza di una figura piana, come nel metodo delle Proiezioni centrali, è usato anche per la risoluzione di alcuni problemi metrici, che in questo metodo non sono risolvibili con l'ausilio di piani proiettanti.

Come è noto (cfr. VII, VIII, Parte I) la proiezione P′, sul piano $\pi_1$, di un punto P appartenente ad un piano $\alpha$ non proiettante, cioè non passante per il centro di proiezione (proprio o improprio) e il ribaltato P* dello stesso punto nel ribaltamento di $\alpha$ su $\pi_1$, si corrispondono in



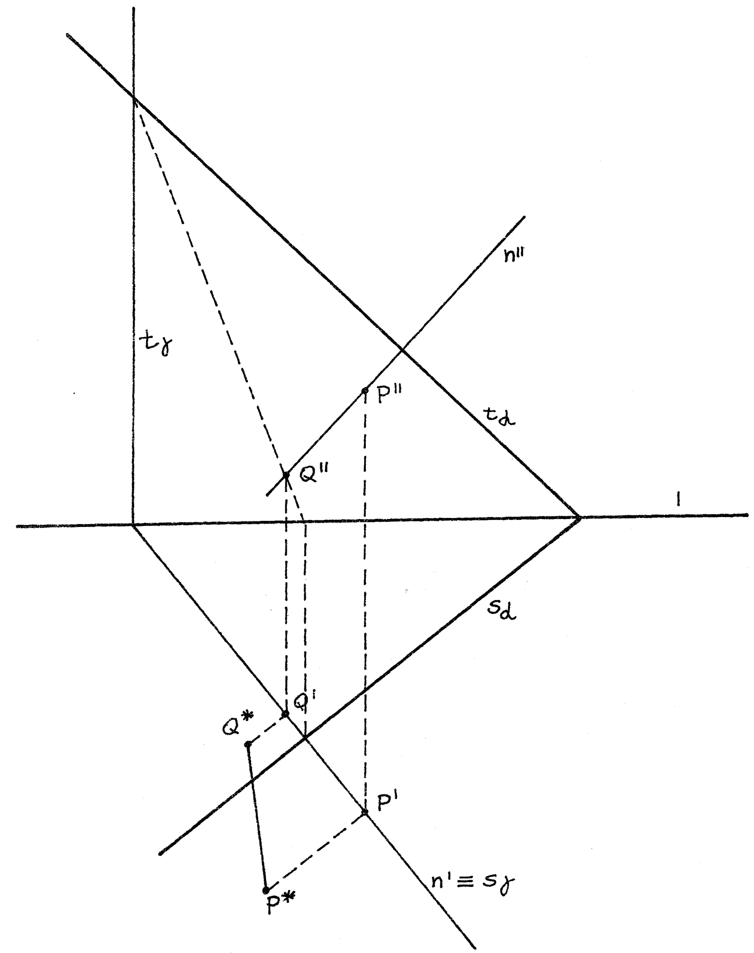


Fig. 58

un'omologia $\omega$, avente per asse la retta comune ad $\alpha$ e $\pi_1$, cioè la retta $s_a$.

Nel nostro caso, le stelle prospettive, la cui sezione (cfr. VIII, 2, Parte I) con $\pi_1$ determina l'omologia $\omega$, hanno entrambe il centro improprio: la stella che fornisce le immagini P′ dei punti di $\alpha$, ha per centro il punto $O_{1\infty}$, direzione ortogonale a $\pi_1$; la stella che fornisce i ribaltati

$P^*$ degli stessi punti, ha per centro il punto improprio $R_\infty$, ortogonale al piano che biseca il diedro $\alpha\pi_1$, attraversato da $\alpha$ nel ribaltamento.

Il centro dell'omologia, intersezione con $\pi_1$ della retta (impropria) $R_\infty O_{1\infty}$ che congiunge i centri delle stelle prospettive, è dunque ancora un punto improprio. Inoltre, poiché la giacitura determinata dalla

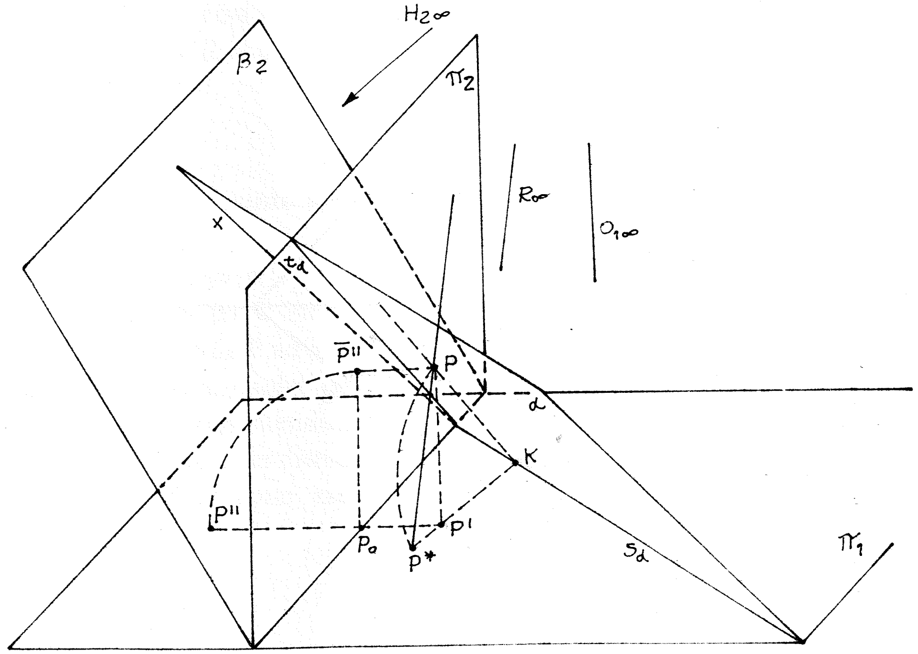


**Fig. 59**

retta impropria $R_\infty O_{1\infty}$, ortogonale tanto ad $\alpha$ (cui è ortogonale $R_\infty$) che a $\pi_1$ (cui è ortogonale $O_{1\infty}$), è ortogonale alla retta $s_\alpha$ comune ad $\alpha$ e $\pi_1$, tale centro coincide con la direzione ortogonale alla prima traccia $s_\alpha$ di $\alpha$: l'omologia $\omega$ è dunque un'omologia affine ortogonale, di asse $s_\alpha$.

Nota una coppia di punti ($P'$,$P^*$), corrispondenti in $\omega$, è possibile costuire la ribaltata di una figura $F$ del piano $\alpha$, quando sia nota la sua proiezione $F'$; oppure risolvere il problema inverso, vale a dire, data la vera



forma e grandezza di $F$, costruire l'immagine $F'$. Si osservi allo scopo, (fig. 59) che, noto $P'$, il punto $P^*$ cade sulla perpendicolare condotta da $P'$ alla retta $s_\alpha$, ad una distanza da questa (in uno dei due semipiani di origine $s_\alpha$, secondo il verso del ribaltamento) uguale all'ipotenusa $\overline{KP}$ del triangolo rettangolo, i cui cateti sono rispettivamente $\overline{P'K}$ (distanza di $P'$ da $s_\alpha$) e $\overline{PP'}$ (quota di P).

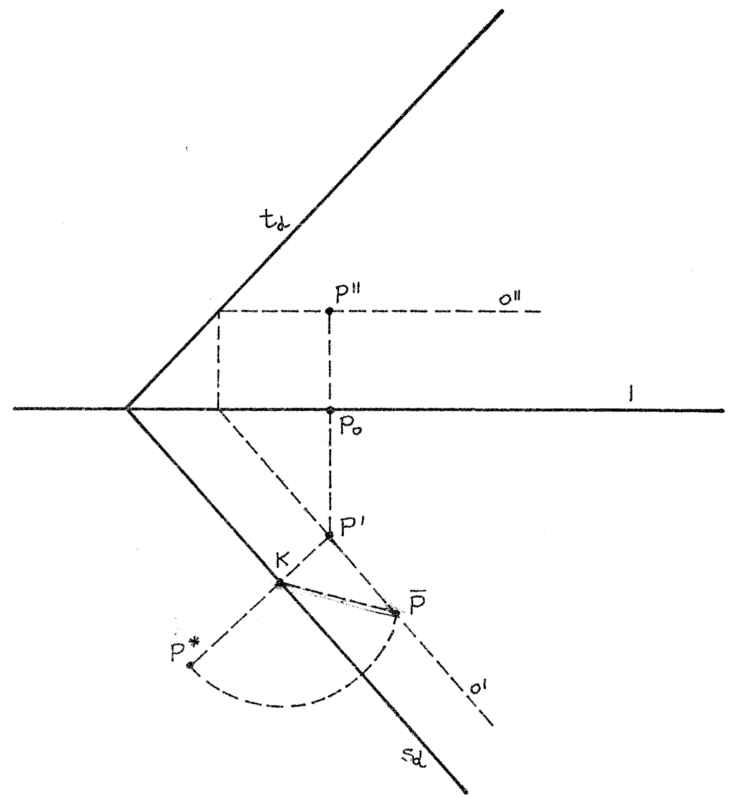


**Fig. 60**

Dato dunque un punto P ($P'$, $P''$) appartenente ad $\alpha$ (fig. 60) e condotta da $P'$ la retta $P'K$ ortogonale ad $s_\alpha$, si stacchi, sulla parallela $o'$ a partire da $P'$ (da una parte o dall'altra) il segmento $\overline{P'\overline{P}}$ di lunghezza uguale al valore assoluto della quota di P (cioè alla misura del segmento $\overline{P''P_o}$). Uno dei punti in cui la circonferenza di centro K e raggio $\overline{K\overline{P}}$ interseca la retta $P'K$ (la scelta dipende dal verso di rotazione del ribaltamento) è il ribaltato P* di P.

Determinata dunque su $\pi_1$ l'affinità ortogonale $\omega$, di asse $s_\alpha$ e punti corrispondenti P′ e P*, mediante le note proprietà (rette omologhe si intersecano sull'asse; punti omologhi sono allineati col centro) è possibile eseguire le trasformazioni sopra enunciate.

Concludiamo dunque che:

*La prima immagine e la ribaltata su $\pi_1$ di una figura appartenente ad un piano $\alpha$ non proiettante, si corrispondono in una omologia affine ortogonale, avente per asse la prima traccia del piano.*

## 28.1. Angoli di due rette

Date due rette $r$ ($r'$, $r''$) ed $s$ ($s'$, $s''$), incidenti in un punto P (P′, P″), gli angoli da esse formati si determinano mediante il ribaltamento su

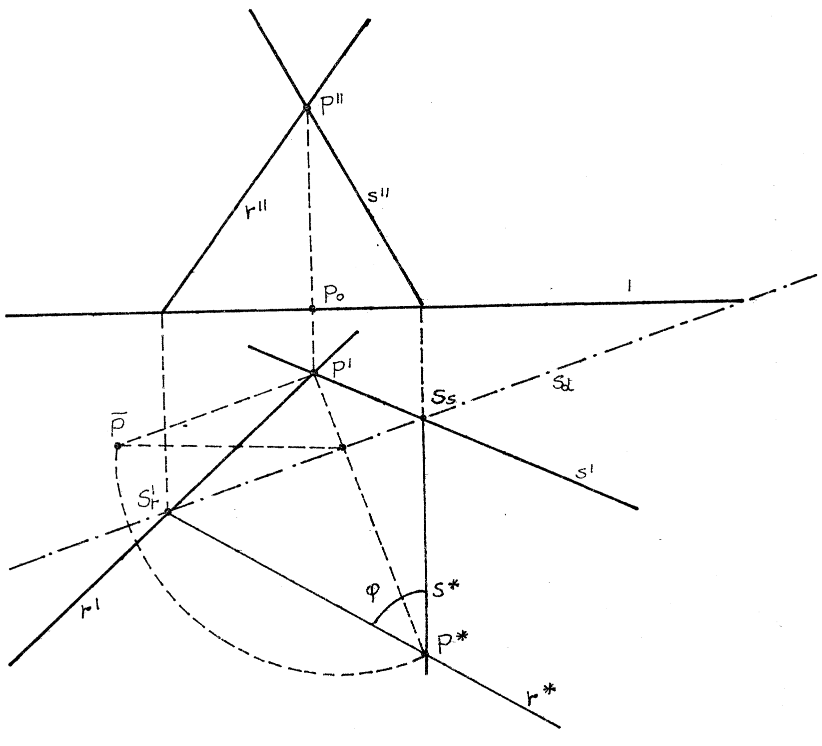


Fig. 61 a



$\pi_1$ del piano $\alpha$, individuato da $r$ ed $s$.

Di tale piano è sufficiente determinare la prima traccia $s_\alpha$, congiungendo le prime tracce $S_r$ ed $S_s$ delle due rette (fig. 61a). Per costruire le rette $r^*$ ed $s^*$, ribaltate di $r$ e di $s$, si osservi che i punti $S_r$ ed $S_s$ sono uniti nell'omologia di ribaltamento $\omega$, e che il punto P*, ribaltato di P, è il punto comune ad $r^*$ ed $s^*$.

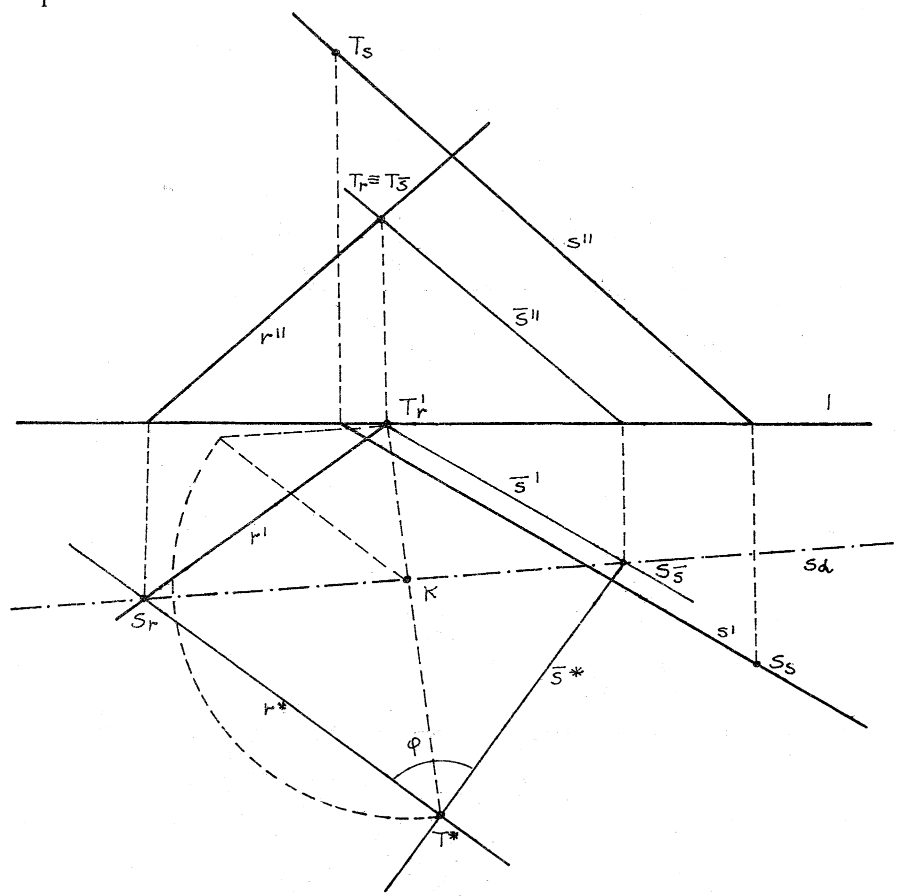


Fig. 61 b

Se le rette date sono sghembe, gli angoli richiesti sono individuati da due rette complanari e parallele alle date. Ad esempio, se $\bar{s}$ è una retta parallela ad $s$ e complanare con $r$, gli angoli delle rette $r$ ed $\bar{s}$ sono uguali a quelli di $r$ ed $s$ (fig. 61b).

## 28.2. Ampiezze dei diedri di due piani

Dati due piani $\alpha\,(s_\alpha,\ t_\alpha)$ e $\beta\,(s_\beta,\ t_\beta)$, le ampiezze dei diedri da essi individuati, possono determinarsi mediante gli angoli di una loro sezione normale col piano $\gamma$ (fig. 62). Più semplicemente, scelto un qualunque

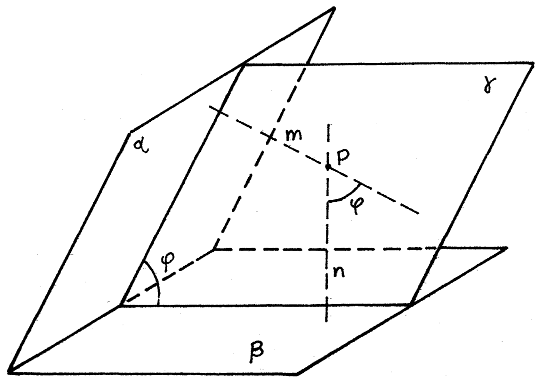


**Fig. 62**

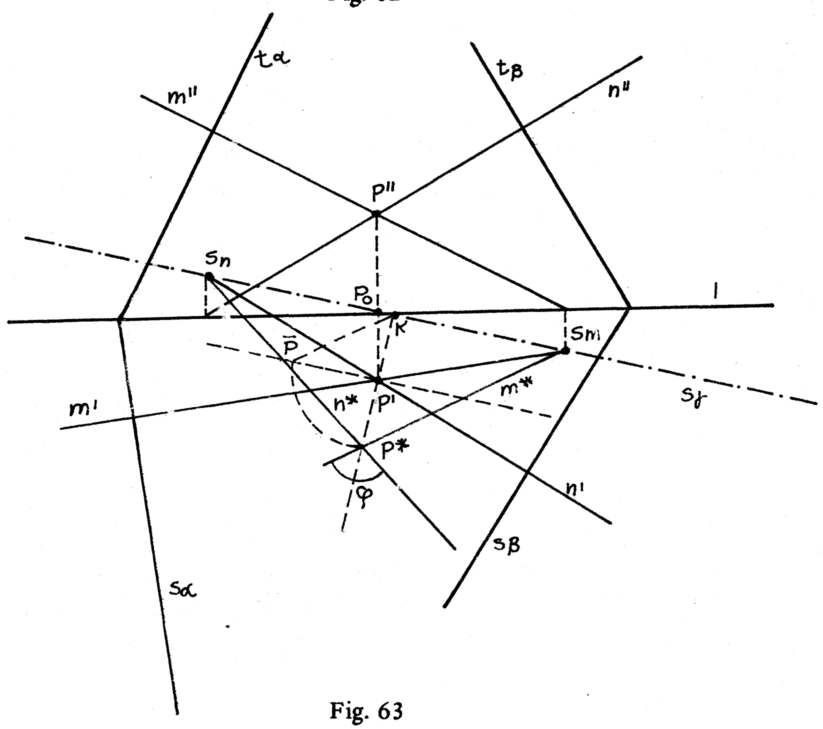


**Fig. 63**



punto P, esterno ai due piani e condotte da P le perpendicolari $m$ ed $n$, rispettivamente ad $\alpha$ e $\beta$, le ampiezze degli angoli $\widehat{mn}$ forniscono le ampiezze dei diedri (fig. 62).

La fig. 63 è relativa a questa soluzione, che riconduce il problema a quello della determinazione degli angoli di due rette (cfr. 28.1).

## 28.3. Angolo di una retta e un piano

Dati una retta $r\,(r',\ r'')$ e un piano $\alpha\,(s_\alpha,\ t_\alpha)$, per conoscere l'angolo $\psi$, come nel metodo delle Proiezioni centrali (cfr. 14.7), è opportuno

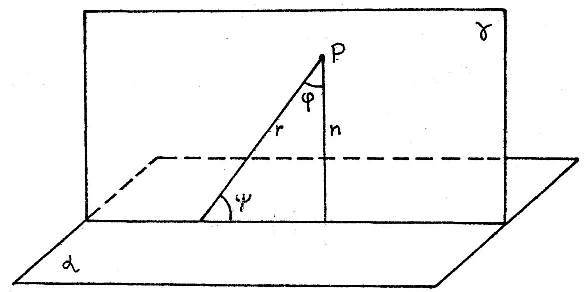


Fig. 64a

costruire l'angolo $\varphi$, complementare di $\psi$, che la retta $r$ forma con una qualunque retta $n$, normale ad $\alpha$ (fig. 64a).

Scelto dunque sulla retta $r$ un punto P (P', P'') e condotta per esso la retta $n\,(n',\ n'')$ perpendicolare ad $\alpha$, il problema è ancora quello di determinare l'angolo $\varphi$ delle rette $r$ ed $n$.

In fig. 64b è stato determinato l'angolo acuto $\varphi$ delle ribaltate $r^*$ ed $n^*$ ed il suo complemento $\psi$.

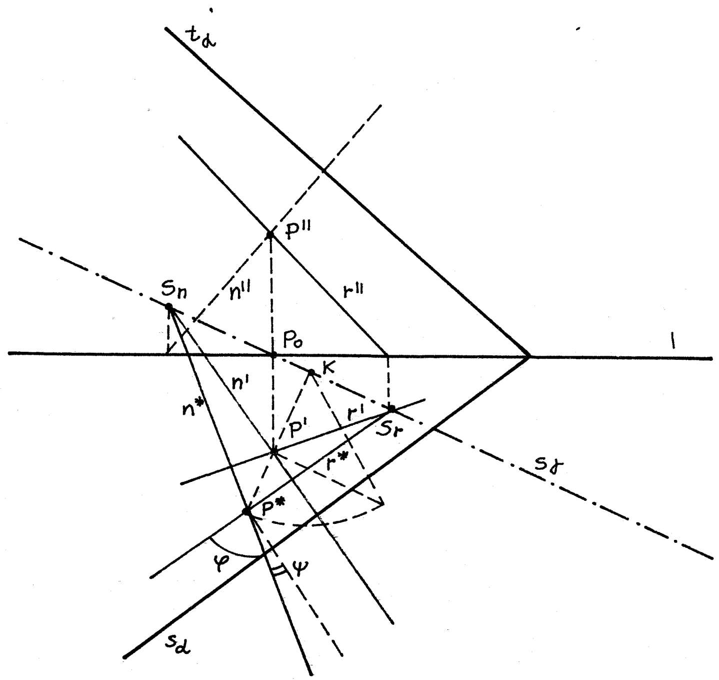

Fig. 64b

## 28.4. Distanza di un punto da una retta

Dati un punto P (P$'$, P$''$) ed una retta $r$ ($r'$, $r''$), non passante per P, si ribalti il piano $\alpha$, individuato da P ed $r$, e si determini il punto P* nonché la retta $r^*$: la distanza di P* da $r^*$ è quella richiesta.

In fig. 65, il piano $\alpha\,(s_a,\ t_a)$ è stato determinato costruendo la retta $\bar{r}$ ($\bar{r}'$, $\bar{r}''$) parallela ad $r$ e passante per P (cfr. 24.2); si è poi costruito, come di consueto, il punto P*, e per esso la retta $\bar{r}^*$, omologa in $\omega$ di $\bar{r}'$ e ribaltata di $\bar{r}$; tracciata infine la retta $r^*$, passante per S$_r$ e parallela ad $\bar{r}^*$, la distanza tra $r^*$ ed $\bar{r}^*$ è uguale alla distanza richiesta.



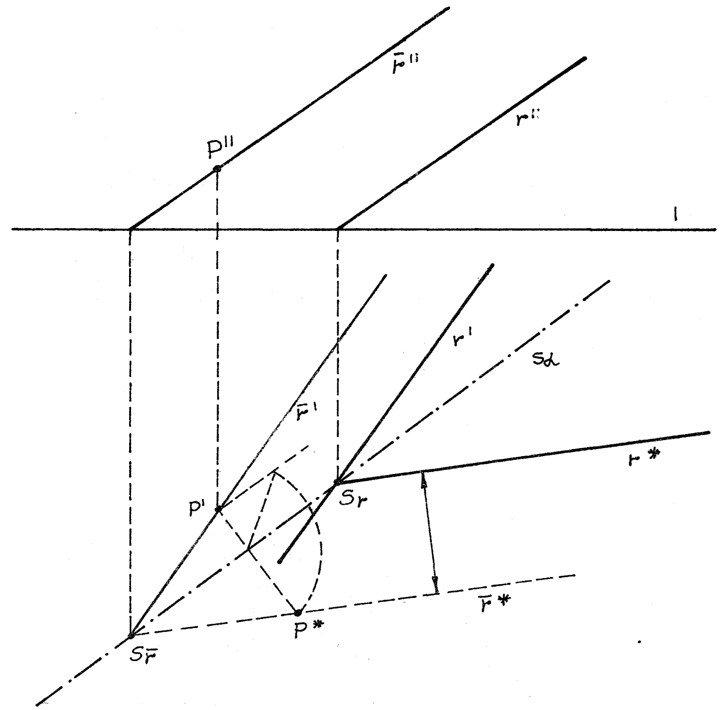

Fig. 65

## 28.5. Rappresentazione di un poligono regolare

Come si è accennato, l'omologia $\omega^{-1}$ (detta anche di raddrizzamento), consente di rappresentare una figura piana assegnata, fornendone le immagini. Ci occuperemo, in particolare, della rappresentazione di poligoni.

Per rappresentare, ad esempio, un esagono regolare, dato il piano $\alpha\,(s_a,\ t_a)$ cui esso appartiene, e la prima proiezione $\overline{A'B'}$ di un suo lato, si costruisca per il punto A (di cui è necessario determinare la seconda proiezione A$''$) la retta orizzontale $o$ di $\alpha$: la prima immagine $o'$ passa per A$'$ ed è parallela ad $s_a$, la seconda $o''$ passa per A$''$ ed è parallela ad $l$.

Determinato il punto A*, ribaltato di A (cfr. n. 28, fig. 60), mediante l'omologia $\omega$, si determini il segmento $A^*B^*$ e su questo si costruisca uno dei due possibili esagoni regolari (con l'ausilio del cerchio circoscritto).

Mediante l'omologia inversa $\omega^{-1}$, si trasformi l'esagono così costruito nella sua prima immagine: poiché l'omologia affine $\omega$ conserva il parallelismo, le immagini dei lati opposti risultano parallele, circostanza questa che semplifica le costruzioni.

Per determinare la seconda immagine dell'esagono, evitando la costruzione delle seconde immagini di tutte le rette del piano cui appartengono i lati, è possibile servirsi di un'altra omologia $\omega'$, esistente tra la prima e la seconda immagine di una qualunque figura piana.

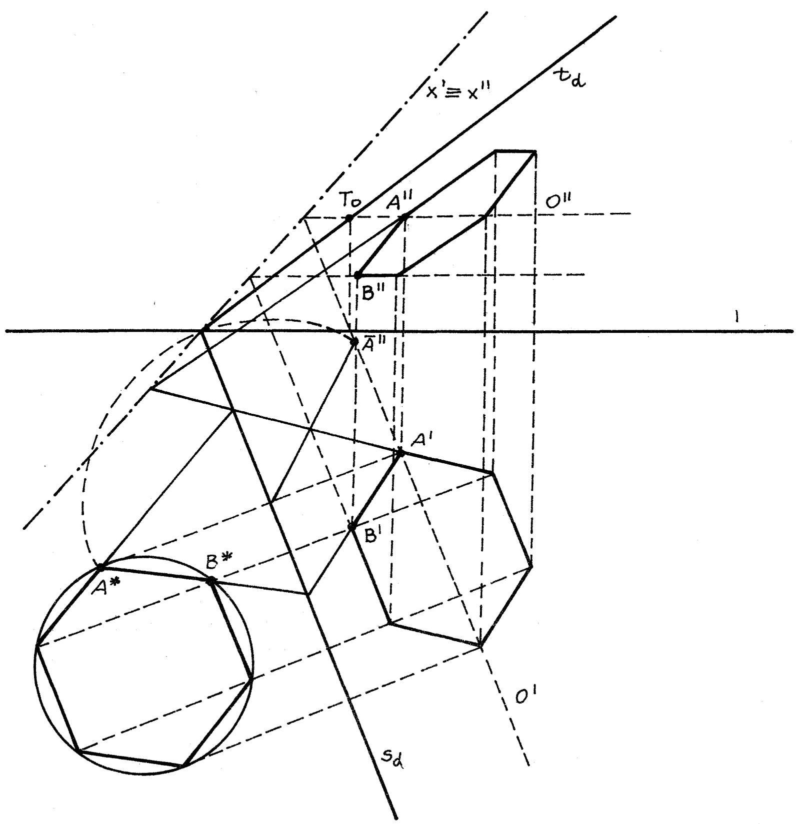


Fig. 66



Infatti la corrispondenza tra la prima e la seconda immagine di una figura del piano $\alpha$ è una omografia, prodotto delle prospettività seguenti: la prospettività $\omega_1$ di centro $O_{1\infty}$ tra $\pi_1$ ed $\alpha$, che associa P' a P; la prospettività $\omega_2$ di centro $O_{2\infty}$, che associa P a $\overline{P}''$ e infine la prospettività $\omega_3$ tra i piani $\pi_2$ e $\pi_1 \equiv \pi_2^*$ con centro $H_{2\infty}$ ortogonale a $\beta_2$, che associa $\overline{P}''$ a P''.

Inoltre i punti della retta $x$ (cfr. fig. 59), comune ad $\alpha$ e al secondo piano bisettore $\beta_2$ (cfr. n. 23.1), hanno le immagini coincidenti nella retta $x' \equiv x''$.

L'omografia $\omega' = \omega_1 \cdot \omega_2 \cdot \omega_3$, composta dalle sopra definite prospettività e che associa P' a P'', è diversa dall'identità sul quadro ed ha le seguenti proprietà:

- punti corrispondenti sono allineati con il punto improprio della normale ad $l$;
- esiste una retta $x' \equiv x''$, insieme di punti uniti.

Quindi $\omega'$ è un'omologia (cfr. VIII n. 2.1, parte I).

Inoltre, essendo il centro dell'omologia $\omega'$ un punto improprio, la cui direzione è determinata su $\pi_1$ dalla giacitura comune alle tre direzioni $O_{1\infty}$, $O_{2\infty}$, $H_{2\infty}$, tutte ortogonali alla linea di terra $l$, l'omologia $\omega'$ è una omologia affine.

Concludiamo dunque che:

*La prima e la seconda immagine di una figura appartenente a un piano $\alpha$, si corrispondono in un'omologia affine, avente per asse la retta in cui coincidono le immagini dell'intersezione di $\alpha$ col secondo piano bisettore, e per centro la direzione perpendicolare alla linea di terra.*

Nella fig. 66, determinata la retta $x' \equiv x''$ (cfr. 23.1, fig. 30), si è trasformata la prima immagine dell'esagono mediante l'omologia $\omega'$, nella quale A', A'' costituiscono una coppia di punti corrispondenti.

## 28.6. Rappresentazione del cerchio

Sia dato un cerchio $\gamma$ mediante il piano $\alpha(s_\alpha, t_\alpha)$ cui appartiene, il centro C (C', C'') e la misura del raggio $r$; costruito il ribaltato C* del punto C, si tracci la circonferenza $\gamma^*$ (con centro in C* e raggio uguale ad $r$) quale ribaltata di $\gamma$ e, infine, mediante l'omologia $\omega^{-1}$, si trasformi $\gamma^*$ nella conica $\gamma'$, immagine del cerchio $\gamma$.

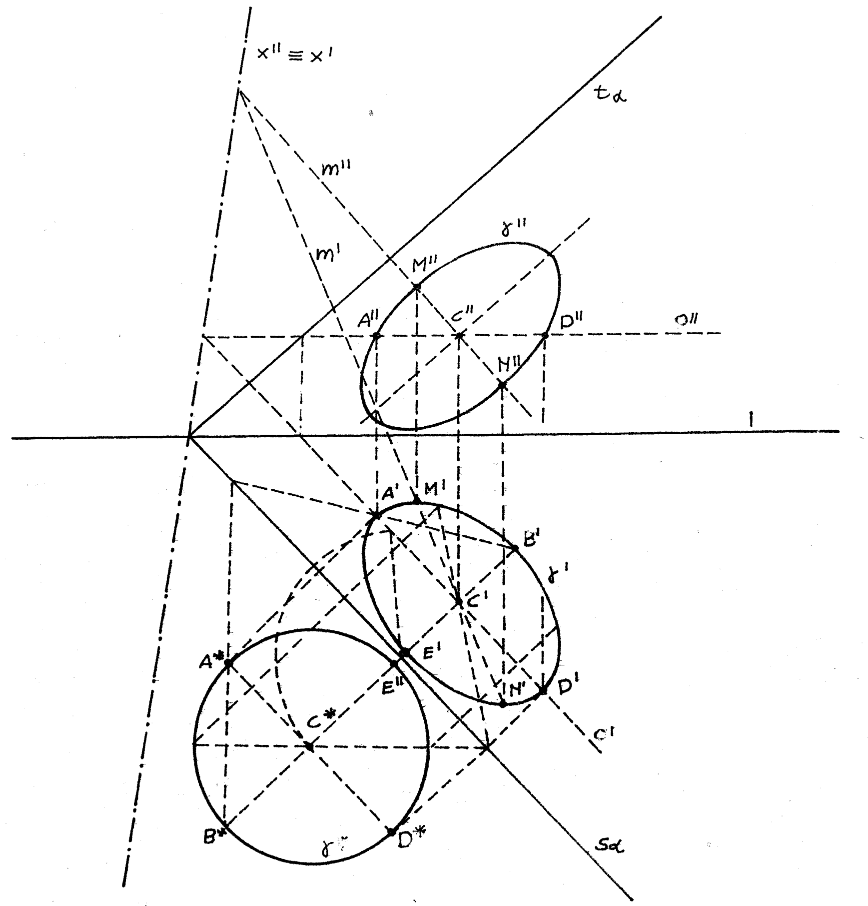


Fig. 67

Tale conica, in quanto trasformata di $\gamma$ in una omologia affine, è certamente un'ellisse. I diametri[1] di $\gamma$, rispettivamente ortogonale e pa-



rallelo all'asse $s_\alpha$, si trasformano nell'asse maggiore e nell'asse minore di $\gamma'$: infatti (fig. 67) il segmento $\overline{A'C'}$, omologo di $\overline{A^*C^*}$, appartiene alla retta $o'$; ciò vuol dire che il diametro $\overline{AD}$ di $\gamma$ è parallelo a $\pi_1$, quindi è l'unico diametro che si proietta ortogonalmente su $\pi_1$ in vera grandezza; il diametro BE, ortogonale ad $\overline{AD}$, e appartenente alla retta di massima pendenza di $\alpha$, è quello la cui proiezione subisce il maggior accorciamento.

Determinato l'asse minore $\overline{B'E'}$, i cui estremi sono i trasformati di B* ed E* (ottenuti servendosi della coppia (A*, A') o (D*, D')), è sufficiente trasformare soltanto un ulteriore punto di $\gamma^*$, per ottenere ancora quattro punti di $\gamma'$, mediante le proprietà di simmetria dell'ellisse rispetto agli assi.

Infine, con ragionamento analogo si determina l'asse maggiore di $\gamma''$, e la retta cui appartiene l'asse minore: il primo è parallelo a $t_\alpha$ e di lunghezza uguale al diametro di $\gamma$; di quello minore, ortogonale al primo, si possono determinare gli estremi, trasformando mediante l'omologia $\omega'$ (cfr. 28.5) tra $\gamma'$ e $\gamma''$ i punti M', N' in cui la retta $m'$, prima immagine dell'asse minore $m$, interseca l'ellisse $\gamma'$.

---

[1] Osserviamo che se $\omega : \alpha' \to \alpha^*$ è un'omologia e $\gamma'$ una conica di $\alpha'$, la polare del punto P', rispetto a $\gamma'$, è trasformata nella polare di $P^* = \omega(P')$ rispetto a $\gamma^* = \omega(\gamma')$. Inoltre, se $\omega$ è un'affinità omologica, alla retta impropria di $\alpha'$ corrisponde, in $\omega$, la retta impropria di $\alpha^*$. Ne consegue che il polo della retta impropria rispetto alla conica $\gamma'$ è trasformato da $\omega$ nel polo della retta impropria rispetto a $\gamma^*$, e, cioè, l'omologia affine muta il centro di una conica nel centro della conica corrispondente e diametri in diametri.