CAPITOLO II
ALGEBRA BOOLEANA

2.1) Introduzione.

L'algebra booleana, algoritmo nato nel 1847 ad opera del matematico inglese George Boole, e' diventata dal 1938, quando Claude Shannon ne adatto' il simbolismo all'analisi dei circuiti di commutazione, uno strumento essenziale nel progetto dei circuiti logici.

L'algebra booleana (conosciuta anche con il nome di algebra logica o algebra binaria) contemplava semplicemente due valori atti a rappresentare il vero o il falso in una proposizione e in origine permetteva di studiare formalmente i problemi della logica deduttiva. Successivamente, con Shannon, i due valori dell'algebra booleana servirono a definire lo stato di apertura o di chiusura di un generico contatto; infine i due valori indicarono la presenza o l'assenza di un segnale in un particolare punto di un circuito.

Risulta in ogni caso evidente che l'algebra booleana considera unicamente l'esistenza di due elementi distinti, mutuamente escludentisi, indicati di solito con i simboli 0 e 1. Tali due elementi sono chiamati costanti logiche o costanti binarie.

2.2) Variabili e funzioni.

Si dice variabile logica indipendente una grandezza capace di assumere l'uno o l'altro dei due valori 0 e 1. Si dice invece che una variabile y e' funzione delle n variabili indipendenti x_1, x_2 ,.....,x_n , e la si indica con:

$$F(x_1, x_2, ..., x_n)$$

quando esiste un criterio che fa corrispondere in modo univoco ad ognuna delle 2^n possibili configurazioni diverse delle x un valore della y.

Il numero di funzioni di n variabili che si possono definire e' quindi

$$2^{2^n}$$

x_1	x_2	x_3	y
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

figura 2.2.1

Dalla definizione appena data risulta che una possibile rappresentazione della funzione e' quella che si ottiene scrivendo tutte le possibili n-ple di valori (dette configurazioni) delle variabili indipendenti ed assegnando per ciascuna di esse il valore che la y deve assumere. Un tale tipo di rappresentazione assume il nome di tavola di verita'.

A titolo di esempio in fig. 2.2.1 e' riportata la tavola di verita' di una delle 256 possibili funzioni di tre variabili. Ovviamente tale tavola avra' otto righe, pari alle otto possibili configurazioni delle variabili indipendenti.

Ha interesse prendere in considerazione una alla volta tutte le funzioni di una variabile ed alcune delle funzioni di due variabili.

2.3) Funzioni di una variabile.

Per quanto detto al paragrafo precedente esistono quattro funzioni di una variabile, di cui si riportano le tavole di verita'.

x	y_1
0	0
1	0

x	y_2
0	1
1	1

x	y_3
0	0
1	1

x	y_4
0	1
1	0

Le prime due funzioni y_1 e y_2 sono due funzioni degeneri e coincidono con le costanti logiche; la funzione y_3 e' la funzione identica ed in termini simbolici puo' essere indicata con:

$$y_3 = x$$

Maggiormente interessante e' la funzione y_4 che vale 0 quando x vale 1 e viceversa. Tale funzione viene chiamata negazione e simbolicamente indicata con:

$$y_4 = \overline{x}$$

2.4) Funzioni di due variabili.

Le possibili funzioni di due variabili sono 16; escluse le funzioni degeneri, in numero di 6, fra le rimanenti presentano notevole interesse le seguenti.

2.4.1) Funzione OR o somma logica.

La tavola di verita' e' la seguente:

x_1	x_2	y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

La funzione logica OR, indicata simbolicamente con

$$y = x_1 + x_2$$

vale 1 quando o una o l'altra o ambedue le variabili indipendenti valgono 1. Per la somma logica sono valide le seguenti proprieta', come e' immediato verificare dalla tavola di verita':

$$x + 1 = 1 \qquad\qquad x + 0 = x$$
$$x + x = x \qquad\qquad x + \bar{x} = 1$$

Si puo' estendere il concetto di somma logica anche alle funzioni di n variabili con n>2. La definizione rimane evidentemente la stessa che nel caso di due variabili.

Per la somma logica valgono anche:

a) ***Proprieta' commutativa*** - $x_1 + x_2 = x_2 + x_1$

b) ***Proprieta' associativa*** - $x_1 + x_2 + x_3 = x_1 + (x_2 + x_3)$

2.4.2) Funzione OR esclusivo o somma modulo 2.

La tavola di verita' e':

x_1	x_2	y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

La funzione OR esclusivo, indicata simbolicamente con :

$$y = x_1 \oplus x_2$$

vale 1 quando o una o l'altra delle variabili indipendenti vale 1. Anche per l'OR esclusivo valgono le proprieta' commutativa e associativa.

2.4.3) Funzione AND o prodotto logico.

La tavola di verita' e':

x_1	x_2	y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

La funzione AND, indicata simbolicamente con

$$y = x_1 . x_2$$

vale 1 se e solamente se ambedue le variabili indipendenti valgono 1.

Dalla tavola di verita' e' immediato verificare che valgono le seguenti proprieta':

$$x.0 = 0 \qquad\qquad x.1 = x$$
$$x.x = x \qquad\qquad x.\bar{x} = 0$$

Anche la definizione di prodotto logico si puo' estendere alle funzioni di n variabili con n>2.Per il prodotto logico, come per la somma logica, valgono:

a) ***proprieta' commutativa*** - $x_1 . x_2 = x_2 . x_1$
b) ***proprieta' associativa*** - $x_1 . x_2 . x_3 = x_1 . (x_2 . x_3)$

Per l'insieme delle due funzioni logiche prodotto e somma vale poi la:

c) ***proprietà distributiva*** - $x_1 . x_2 + x_1 . x_3 = x_1 . (x_2 + x_3)$ e $(x_1 + x_2) . (x_1 + x_3) = x_1 + x_2 . x_3$

2.4.4) Funzione NOR.

La tavola di verita' e':

x_1	x_2	y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

E' immediato osservare che la funzione logica NOR, indicata simbolicamente con:

$$y = x_1 \downarrow x_2$$

si puo' interpretare come la negazione della somma logica, per cui molto spesso viene anche indicata con:

$$y = \overline{x_1 + x_2}$$

L'operazione NOR su piu' variabili e' per definizione la negazione della loro somma, cioe':

$$x_1 \downarrow x_2 \downarrow ..... \downarrow x_n = \overline{x_1 + x_2 + ... + x_n}$$

E' interessante notare che, mentre vale per la funzione NOR la proprieta' commutativa, non vale invece quella associativa. Cioe':

$$x_1 \downarrow x_2 = x_2 \downarrow x_1$$

$$x_1 \downarrow x_2 \downarrow x_3 = (\overline{x_1 \downarrow x_2}) \downarrow x_3 \neq (x_1 \downarrow x_2) \downarrow x_3$$

Ogni associazione di variabili va cioe' accompagnata dalla loro negazione, come e' immediato verificare dalla tavola di verita'.

La funzione NOR e' detta anche funzione universale, per ragioni che si vedranno piu' avanti, assieme alla:

2.4.5) Funzione NAND.

La tavola di verita' e':

x_1	x_2	y
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

E' immediato riconoscere che la funzione logica NAND, indicata simbolicamente con:

$$x_1 / x_2$$

puo' essere interpretata come un prodotto logico negato, per cui molto spesso si trovera' espressa nella forma:

$$\overline{x_1 . x_2}$$

L'operazione NAND su piu' di due variabili e', per definizione, la negazione del loro prodotto.

$$x_1 / x_2 / .... / x_n = \overline{x_1 . x_2 .... x_n}$$

Come per la funzione NOR anche l'operatore NAND gode della proprieta' commutativa, ma non di quella associativa. L'associazione di piu' variabili deve sempre essere accompagnata dalla sua negazione.

$$x_1 / x_2 / x_3 = (\overline{x_1 / x_2}) / x_3 \neq (x_1 / x_2) / x_3$$

2.5) Principio di dualita'.

Uno sguardo piu' attento ai postulati fin qui espressi rivela che tali postulati possono essere riuniti a coppie e che in ciascun caso uno dei postulati puo' essere ottenuto dall'altro scambiando la costante logica 0 con la costante logica 1 e l'operatore somma logica con l'operatore prodotto logico.

E' questa una proprieta' generale dell' algebra booleana. Ad esempio, le due espressioni date al paragrafo 2.4.3 per illustrare la proprieta' distributiva, sono una la duale dell'altra.

Di conseguenza ciascun teorema che possa esser dimostrato per l'algebra booleana ammette anche la sua forma duale. Ciascun passo della dimostrazione del primo teorema puo' essere rimpiazzato dal suo duale, ricavando in tal modo la dimostrazione del teorema duale.

2.6) Termini minimi e termini massimi.

Tra tutte le funzioni di n variabili assumono particolare importanza i termini minimi e i termini massimi. E' detta termine minimo quella particolare funzione di n variabili che vale 1 in corrispondenza ad una ed una sola configurazione delle variabili indipendenti.

Risulta quindi evidente che esistono tanti termini minimi quante sono le configurazioni delle variabili di ingresso. Considerando che, dal punto di vista formale, le configurazioni di n variabili coincidono con i numeri 0, 1, ..., 2^n - 1 espressi in numerazione binaria posizionale, i termini minimi vengono di solito indicati con m_i , dove i e' il numero formalmente associato alla configurazione in corrispondenza alla quale il termine minimo vale 1.

D'altra parte dalla definizione di termine minimo risulta che esso puo' essere espresso nella forma di prodotto logico di variabili dirette e negate, le prime in corrispondenza delle variabili che nella configurazione di ingresso valgono 1, le seconde in corrispondenza delle variabili che nella stessa configurazione valgono 0. Ad esempio il termine minimo m_3 di tre variabili e':

$$\overline{x_1}\, x_2 x_3$$

Mediante i termini minimi e' possibile esprimere una qualsiasi funzione logica di n variabili nella forma di somma di prodotti. Infatti, detti y_i i valori che la funzione deve assumere in corrispondenza alla configurazione associata al numero i, si puo' scrivere:

$$y = \sum_{0}^{2^n-1} y_i . m_i \qquad (2.6.1)$$

In modo del tutto analogo vengono definiti i termini massimi; essi sono quelle particolari funzioni che valgono 0 in corrispondenza ad una ed una sola configurazione delle variabili di ingresso e vengono di solito indicati con M_i. In termini simbolici essi vengono espressi mediante la somma logica delle variabili indipendenti dirette e negate. Si avra' la variabile diretta se nella configurazione di ingresso essa assume il valore 0, negata in caso contrario.

Ad esempio il termine massimo M_5 di tre variabili e':

$$M_5 = \overline{x_1} + x_2 + \overline{x_3}$$

Anche mediante i termini massimi e' possibile esprimere una qualsiasi funzione logica nella forma di prodotto di somme.

$$y = \prod_{0}^{2^n-1} (y_i + M_i) \qquad (2.6.2)$$

Da quanto detto si puo' quindi affermare che qualsiasi funzione logica e' esprimibile mediante i tre operatori di somma logica, prodotto logico e negazione.

Le rappresentazioni di una funzione logica ricavate dalle (2.6.1) e (2.6.2) prendono il nome di forme canoniche.

2.7) I teoremi dell'algebra booleana.

Dette x, y, z tre generiche grandezze booleane (costanti, variabili o funzioni) per esse valgono i seguenti teoremi.

2.7.1) Primo teorema dell'assorbimento.

Il valore dell'espressione x + x.y dipende esclusivamente da x. Infatti

$$x + x.y = x.(1 + y) = x$$

L'espressione duale di tale teorema e':

$$x.(x + y) = x + x.y = x$$

2.7.2) Secondo teorema dell'assorbimento.

Il valore dell'espressione $x + \overline{x}.y$ e' uguale a quello della somma logica $x + y$. Infatti ricorrendo al primo teorema dell'assorbimento si ha:

$$x + \overline{x}.y = x + x.y + \overline{x}.y = x + y.(x + \overline{x}) = x + y$$

2.7.3) Terzo teorema dell'assorbimento.

$$x.y + y.z + \overline{x}.z = x.y + \overline{x}.z$$

Infatti:

$$\begin{gathered} x.y + y.z + \overline{x}.z = x.y + y.z.(x + \overline{x}) + \overline{x}.z = \\ x.y + x.y.z + \overline{x}.y.z + \overline{x}.z = x.y.(1 + z) + \overline{x}.z.(1 + y) = x.y + \overline{x}.z \end{gathered}$$

mentre l'espressione duale e':

$$\begin{gathered} (x + y).(y + z).(\overline{x} + z) = x.y.z + x.z + \overline{x}.y + \overline{x}.y.z + y.z = \\ = x.z + \overline{x}.y + y.z = x.\overline{x} + x.z + \overline{x}.y + y.z = \\ \overline{x}.(x + y) + z.(x + y) = (x + y).(\overline{x} + z) \end{gathered}$$

2.7.4) Teorema di De Morgan.

La negazione della somma ha lo stesso valore del prodotto dei suoi addendi negati. Cioe':

$$\overline{x + y} = \overline{x}.\overline{y}$$

mentre la sua espressione duale e'

$$\overline{x.y} = \overline{x} + \overline{y}$$

Queste due espressioni costituiscono il teorema di De Morgan che formalmente si puo' esprimere con:

$$\overline{F}(x_1, x_2,....,x_n,+,.) = F(\overline{x_1}, \overline{x_2},....,\overline{x_n},.,+)$$

cioe' la negazione di una funzione si ottiene negando ogni variabile e scambiando tra di loro i due operatori di somma e prodotto logico.

A titolo di esempio si consideri la funzione:

$$F = x.\overline{y} + \overline{x}.y$$

La sua negazione, applicando il teorema di De Morgan, sara':

$$F' = \overline{F} = (\overline{x} + y).(x + \overline{y}) = \overline{x}.\overline{y} + x.y$$

di cui e' immediata la verifica tramite la tavola di verita'.

Sempre mediante De Morgan e' possibile ricavare la rappresentazione canonica di una qualsiasi funzione in forma di prodotto di somme da quella in forma di somma di prodotti e viceversa. La funzione y si puo' infatti concepire come la negazione della funzione $\overline{y}$, scritta in forma canonica come somma dei termini minimi che corrispondono agli zeri della funzione y. Si ha cioe':

$$y = \overline{\overline{y}} = \overline{\sum m_i . \overline{y_i}}$$

Applicando il teorema di De Morgan si ottiene:

$$y = \prod(\overline{m_i} + y_i) = \prod(M_i + y_i)$$

espressione coincidente con la (2.6.2).

Ancora, attraverso l'uso del teorema di De Morgan, e' possibile dimostrare che l'insieme completo degli operatori, necessario e sufficiente ad esprimere una qualsiasi funzione logica non e' l'insieme AND-OR-NOT, bensi' o l'insieme AND-NOT o quello OR-NOT.

Infatti:

$$x_1 + x_2 = \overline{\overline{x_1 + x_2}} = \overline{\overline{x_1}.\overline{x_2}}$$

o analogamente

$$x_1 . x_2 = \overline{\overline{x_1 . x_2}} = \overline{\overline{x_1} + \overline{x_2}}$$

Allo stesso modo ci si rende conto perche' le funzioni NAND e NOR sono dette anche funzioni universali; con una sola di esse e' infatti possibile esprimere qualsiasi funzione logica. Infatti gia' si sa che qualunque funzione logica e' esprimibile in termini di AND-OR-NOT.

Infatti:

$$\overline{\overline{x+y}} = \overline{\bar{x}.\bar{y}} = \bar{x} / \bar{y}$$
$$x.y = \overline{\overline{x.y}} = \overline{x/y}$$
$$\bar{x} = \overline{x.x} = x/x$$

oppure

$$x+y = \overline{\overline{x+y}} = \overline{x \downarrow y}$$
$$\overline{\overline{x.y}} = \overline{\bar{x}+\bar{y}} = \bar{x} \downarrow \bar{y}$$
$$\bar{x} = \overline{x+x} = x \downarrow x$$

e quindi qualsiasi funzione logica e' esprimibile in termini di solo NAND o di solo NOR.

2.8) Interpretazione circuitale dell'algebra booleana.

Come si e' gia' accennato in precedenza, la prima applicazione circuitale dell'algebra booleana si ebbe per la commutazione a contatti. Questo tipo di applicazione e' ancora largamente usato, ad esempio in campo telefonico, malgrado che lo stesso formalismo sia stato con successo applicato allo studio dei circuiti logici, il cui peso e' oggidi' preponderante.

Nell'interpretazione di Shannon le costanti logiche 0 e 1 indicano rispettivamente un circuito aperto o uno chiuso, mentre le variabili indicano il contatto di un interruttore o di un rele'. Con i simboli X e $\overline{X}$ si indicano evidentemente due contatti azionati contemporaneamente, ma sempre tali che quando uno e' aperto, l'altro e' chiuso e viceversa.

Si consideri ora un assieme di contatti x_1, x_2,...., x_n in parallelo tra di loro, come illustrato in fig. 2.8.1.

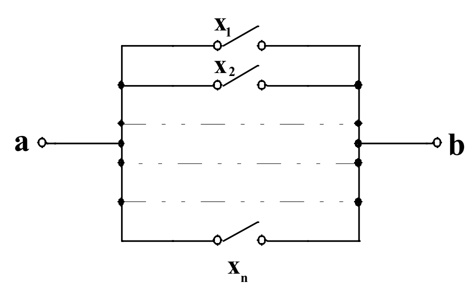


figura 2.8.1

Il circuito tra A e B sara' continuo quando almeno uno dei contatti e' chiuso. Ne consegue che la somma logica

$$x_1 + x_2 + ... + x_n$$

descrive, secondo l'analogia di Shannon, il comportamento elettrico di n contatti in parallelo tra A e B.

Analogamente il comportamento di n contatti in serie tra di loro tra i punti A e B e' descritto dal prodotto logico

$$x_1 . x_2 .... x_n$$

L'analogia introdotta in tal modo permette di scrivere l'espressione analitica di ogni raggruppamento serie-parallelo di contatti e viceversa di interpretare in questo senso qualsiasi espressione logica. L'espressione logica, che indica sotto quali condizioni un circuito connette elettricamente due punti A e B, e' detta funzione di trasmissione o piu' semplicemente funzione del circuito. Si possono quindi trattare formalmente e facilmente problemi sia di analisi che di sintesi di circuiti a contatti.

A titolo di esempio si consideri il seguente problema di sintesi.

Si vuol progettare un circuito capace di accendere o di spegnere una lampada mediante uno qualsiasi di tre interruttori indipendenti. Indicando con L=1 la condizione di lampada accesa, e' evidente che quando i tre interruttori sono aperti L dovra' valere 0. Chiudendo uno qualsiasi degli interruttori essa dovra' assumere il valore 1, mentre tornera' al valore 0 azionando un qualsiasi altro interruttore. Infine essa riassumera' nuovamente il valore 1 quando tutti i tre interruttori saranno chiusi. Chiamando A,B,C le variabili logiche associate a ciascun interruttore si ricava da quanto detto la tavola di verita' di fig. 2.8.2.

A	B	C	L
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

figura 2.8.2

Sintetizzando la funzione del circuito sulla base dei termini minimi si ottiene:

$$L = \overline{A}.\overline{B}.C + \overline{A}.B.\overline{C} + A.\overline{B}.\overline{C} + A.B.C = \overline{A}.(\overline{B}.C + B.\overline{C}) + A.(\overline{B}.\overline{C} + B.C)$$

Il corrispondente circuito e' quello riportato in fig. 2.8.3.

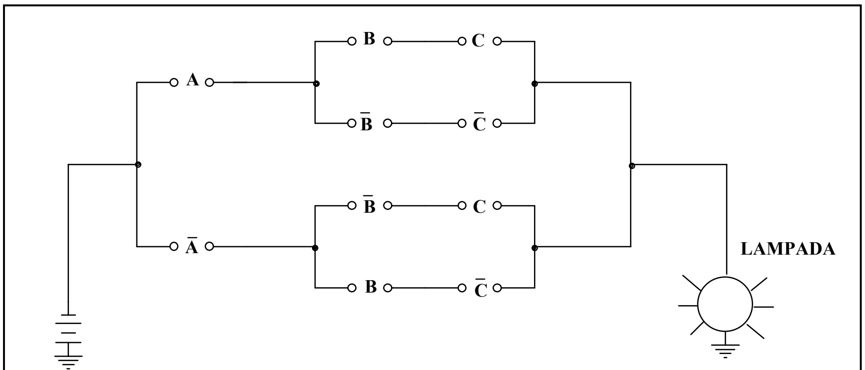


figura 2.8.3

Sintetizzando invece la funzione sulla base dei termini massimi si ottiene:

$$L = (A+B+C).(A+\overline{B}+\overline{C}).(\overline{A}+B+\overline{C}).(\overline{A}+\overline{B}+C) = [A+(B+C).(\overline{B}+\overline{C})].[\overline{A}+(B+\overline{C}).(\overline{B}+C)]$$

cui corrisponde il circuito di fig. 2.8.4.

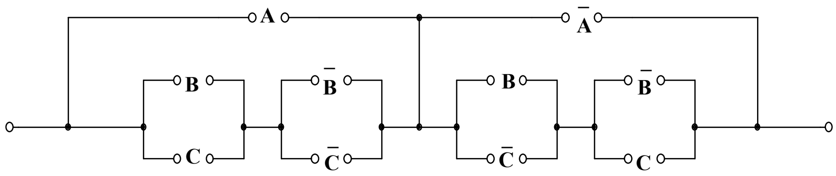


figura 2.8.4

E' bene notare che i circuiti ricavati non sono quelli che corrispondono alle due forme canoniche, bensi' quelli ricavati mediante opportune fattorizzazioni delle forme canoniche. In ambedue i casi questa tecnica ha permesso di risparmiare un contatto A e un contatto $\overline{A}$. In generale si puo' dire che espressioni che contengono un minor numero di variabili, siano esse dirette o negate, conducono a circuiti meno dispendiosi in quanto usano un minor numero di contatti.

E' evidente quindi l'utilita' di manipolare le funzioni assegnate in forma canonica in modo da pervenire ad un'espressione minima che a sua volta corrisponde al circuito con il minimo numero di componenti.

Una tale operazione viene detta ***semplificazione della funzione***.

2.9) Semplificazione delle funzioni logiche.

Si e' gia' visto dagli esempi che precedono che le forme canoniche non esauriscono le espressioni analitiche di una funzione; anzi, come per qualsiasi relazione algebrica, anche quelle logiche possono essere trasformate in un certo numero di espressioni formalmente diverse, ma sostanzialmente equivalenti. Ad esempio:

$$y = \overline{x_1}.\overline{x_2}.\overline{x_3} + \overline{x_1}.\overline{x_2}.x_3 + \overline{x_1}.x_2.x_3 + x_1.x_2.x_3 =$$
$$= \overline{x_1}.\overline{x_2}.(x_3+\overline{x_3}) + x_2.x_3.(x_1+\overline{x_1}) = \overline{x_1}.\overline{x_2} + x_2.x_3$$

Si diranno equivalenti due funzioni che abbiano la stessa tavola di verita', forma semplificata di una funzione ogni sua espressione non canonica, forma minima quella in cui ogni variabile, diretta o negata che sia, compare il minor numero di volte.

Espressioni semplificate si possono ottenere applicando alle espressioni canoniche le relazioni fondamentali dell'algebra booleana, ma questa strada richiede una notevole pratica, si applica facilmente solo a funzioni di un limitato numero di variabili e non da' alcuna garanzia di pervenire effettivamente alla forma minima.

Si semplifichi ad esempio la funzione:

$$y = x_1.x_2.x_3.x_4 + x_1.x_2.x_3.\overline{x_4} + x_1.x_2.\overline{x_3}.x_4 + \overline{x_1}.x_2.x_3.x_4 + x_1.x_2.\overline{x_3}.\overline{x_4}$$

Per la proprieta' distributiva il primo termine si puo' semplificare con il secondo,terzo e quarto, mentre il terzo termine si puo' semplificare con il quinto. Si ottiene:

$$y = x_1 . x_2 . x_3 + x_1 . x_2 . x_4 + x_2 . x_3 . x_4 + x_1 . x_2 . \overline{x_3}$$

Uno qualsiasi dei quattro termini risultanti, ad esempio

$$x_1 . x_2 . x_3 = x_1 . x_2 . x_3 . x_4 + x_1 . x_2 . x_3 . \overline{x_4}$$

viene detto implicante in quanto implica i termini $x_1 . x_2 . x_3 . x_4$ e $x_1 . x_2 . x_3 . \overline{x_4}$ (vale 1 quando valgono 1 o l'uno o l'altro dei termini minimi implicati)[1]. Tornando alla funzione y, il primo e l'ultimo termine possono ancora essere semplificati tra di loro, dando origine all'espressione:

$$y = x_1 . x_2 + x_1 . x_2 . x_4 + x_2 . x_3 . x_4$$

Infine, dal primo teorema dell'assorbimento, si ha

$$y = x_1 . x_2 + x_2 . x_3 . x_4$$

e fattorizzando finalmente si ottiene:

$$y = x_2 . (x_1 + x_3 . x_4)$$

2.10) Il metodo di semplificazione mediante le mappe di Karnaugh.

Il metodo proposto da Karnaugh e' un metodo grafico di semplificazione e permette di ottenere molto semplicemente la forma minima di una funzione come somma di prodotti, facendo ricorso a particolari mappe di rappresentazione. Quale limitazione si ha che, sebbene il metodo sia concettualmente applicabile a funzioni di qualsiasi numero di variabili, esso diviene difficoltoso gia' per 6-7 variabili.

Le mappe di Karnaugh, che possono essere considerate un ulteriore metodo di rappresentazione di una funzione logica, consistono in matrici, le cui posizioni sono in numero pari a quante sono le diverse configurazioni di n variabili; hanno cioe' quattro posizioni per le funzioni di due variabili, otto per quelle di tre variabili, sedici per quelle di quattro e cosi' via.

Ogni posizione e' identificata da n coordinate e viene messa in corrispondenza con una configurazione delle variabili. In fig 2.10.1 e' riportata la mappa di Karnaugh per funzioni di 3 variabili.

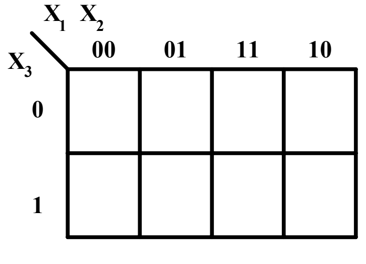


figura 2.10.1

---

[1] *Per giustificare formalmente il nome di implicante sarebbe stato necessario trattare la funzione booleana* ***implicazione****. Per maggiori dettagli si veda l'appendice A.*

L'assegnazione delle coordinate a ciascuna posizione di tabella dev'essere tale che passando da ciascuna casella ad una adiacente, sia in senso orizzontale che verticale, vari il valore di una sola variabile. Si noti che devono essere considerate adiacenti anche le caselle terminali, come se la mappa fosse richiusa su se stessa sia in senso orizzontale che verticale.

In definitiva si puo' dire che ciascuna posizione della matrice corrisponde ad un termine minimo di n variabili. La rappresentazione di una qualsiasi funzione di n variabili si ottiene contrassegnando opportunamente le posizioni corrispondenti ai termini minimi da cui la funzione e' composta.

Ad esempio la funzione

$$y = \overline{x_1}.\overline{x_2}.\overline{x_3}.\overline{x_4} + \overline{x_1}.x_2.x_3.x_4 + \overline{x_1}.\overline{x_2}.x_3.x_4 + \overline{x_1}.x_2.x_3.\overline{x_4}$$

e' rappresentata mediante le mappe di Karnaugh come illustrato in fig. 2.10.2

Una funzione riportata sulla mappa di Karnaugh puo' essere semplificata osservando che due caselle adiacenti, sia in senso orizzontale che verticale, differiscono per il valore di una sola variabile, che in una delle due caselle apparira' come variabile affermata, nell'altra come negata.

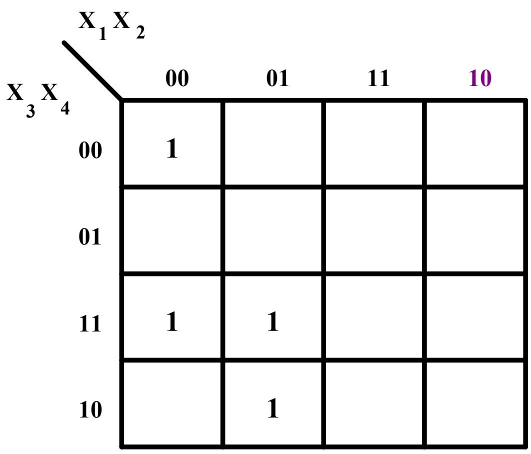


figura 2.10.2

Ne consegue che il prodotto delle n-1 variabili in comune implica ambedue i termini minimi associati alle caselle considerate. Un analogo discorso puo' esser fatto per gruppi di quattro caselle adiacenti, appartenenti alla stessa riga o alla stessa colonna o raccolti attorno allo stesso vertice. Il prodotto delle n-2 variabili comuni implica evidentemente tutti i quattro termini minimi rappresentati dalle quattro caselle.

In definitiva si puo' dire che un raggruppamento di 2^i caselle adiacenti e' implicato dal prodotto delle n-i variabili comuni alle 2^i caselle.

In sostanza, per semplificare una funzione y, rappresentata su una mappa di Karnaugh, basta raccogliere le caselle contrassegnate nel minor numero di insiemi di 2^i caselle adiacenti, con i massimo, in modo che ciascuna casella contrassegnata cada in almeno uno di questi insiemi.

A titolo di esempio si consideri la seguente funzione:

$$y = \overline{x_1}.\overline{x_2}.\overline{x_3}.\overline{x_4} + \overline{x_1}.\overline{x_2}.\overline{x_3}.x_4 + \overline{x_1}.\overline{x_2}.x_3.x_4 + \overline{x_1}.x_2.x_3.x_4 +$$

$$+ \overline{x_1}.\overline{x_2}.x_3.\overline{x_4} + x_1.\overline{x_2}.\overline{x_3}.\overline{x_4} + x_1.\overline{x_2}.\overline{x_3}.x_4 + x_1.\overline{x_2}.x_3.\overline{x_4} +$$

$$+ x_1.\overline{x_2}.x_3.x_4 + \overline{x_1}.x_2.\overline{x_3}.x_4$$

In fig. 2.10.3 e' riportata la mappa di Karnaugh relativa ed e' anche indicato il numero minimo di raggruppamenti di caselle che si possono individuare per ottenere la copertura completa della funzione secondo i criteri appena esposti.

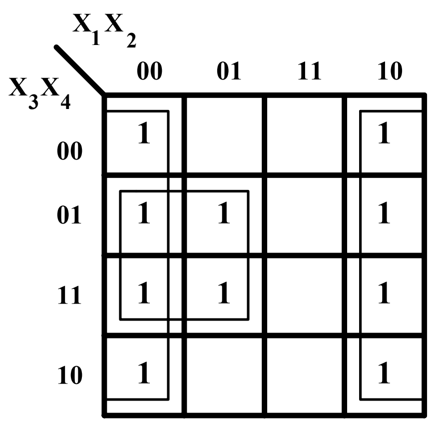


figura 2.10.3

La funzione minima e' quindi:

$$y = \overline{x_2} + \overline{x_1}.x_4$$

e non e' funzione di x_3.

E' abbastanza evidente che, se anziche' considerare ciascuna casella della mappa come rappresentativa di un termine minimo la si considera rappresentativa di un termine massimo, la mappa puo' essere utilizzata anche per sintetizzare una funzione nella forma prodotto di somme. E' sufficiente in tal caso raccogliere gli zeri della funzione nel minimo numero di sottoinsiemi di ampiezza massima che realizzano la copertura completa della funzione stessa. Ciascun sottoinsieme sara' l'impicante dei relativi termini massimi e verra' rappresentato in forma simbolica dalla somma logica delle variabili che rimangono costanti sul sottoinsieme, dirette se le relative coordinate valgono 0, negate in caso contrario.

Il metodo delle mappe di Karnaugh puo' essere applicato, come gia' accennato, anche a funzioni di 5 o 6 variabili. In tal caso tuttavia non si potra' piu' realizzare una mappa piana in cui ogni casella sia adiacente a caselle le cui coordinate differiscano per un'unica variabile. La mappa per cinque variabili pertanto viene realizzata mediante due mappe per quattro variabili, una associata al valore 0 della quinta variabile, l'altra al valore 1. Le adiacenze vanno quindi ricercate anche tra caselle occupanti posizioni omologhe sulle due mappe.

Si voglia da esempio semplificare la seguente funzione:

$$y = x_1.\overline{x_2}.x_3.x_4.x_5 + x_1.\overline{x_2}.x_3.x_4.\overline{x_5} + x_1.\overline{x_2}.x_3.\overline{x_4}.x_5 +$$
$$+ x_1.\overline{x_2}.x_3.\overline{x_4}.\overline{x_5} + x_1.\overline{x_2}.\overline{x_3}.x_4.x_5 + x_1.\overline{x_2}.\overline{x_3}.x_4.\overline{x_5} +$$
$$+ x_1.\overline{x_2}.\overline{x_3}.\overline{x_4}.x_5 + x_1.\overline{x_2}.\overline{x_3}.\overline{x_4}.\overline{x_5} + \overline{x_1}.x_2.x_3.x_4.x_5 +$$
$$+ x_1.x_2.x_3.x_4.x_5 + \overline{x_1}.\overline{x_2}.x_3.x_4.x_5 + \overline{x_1}.x_2.\overline{x_3}.\overline{x_4}.x_5$$

La relativa mappa e' riportata assieme ai raggruppamenti di caselle adiacenti in fig. 2.10.4.

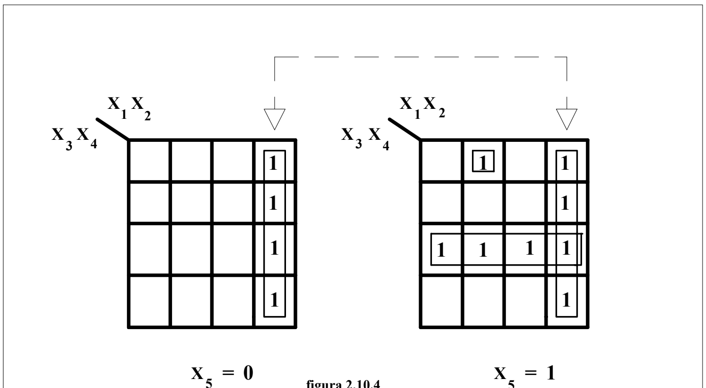


figura 2.10.4

La forma minima della funzione quindi e':

$$y = x_1.\overline{x_2} + x_3.x_4.x_5 + \overline{x_1}.x_2.\overline{x_3}.\overline{x_4}.x_5$$

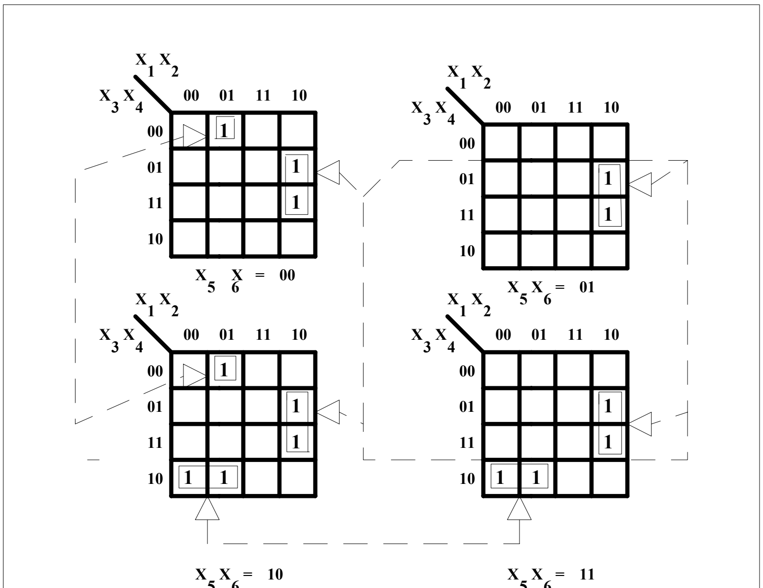


figura 2.10.5

Le mappe di Karnaugh per sei variabili sono formate da quattro mappe per quattro variabili, disposte come illustrato in fig. 2.10.5. Le adiacenze tra caselle vanno quindi ricercate anche tra mappe a loro volta adiacenti in senso orizzontale e verticale. Nell'esempio di fig. 2.10.5 la funzione rappresentata e', in forma minima:

$$y = x_1 . \overline{x_2} . x_4 + \overline{x_1} . x_3 . \overline{x_4} . x_5 + \overline{x_1} . x_2 . \overline{x_3} . \overline{x_4} . \overline{x_6}$$

2.11) Metodo tabellare di Quine - Mc Cluskey.

Il metodo di Quine - Mc Kluskey e' un procedimento tabellare che consente di ottenere la forma minima come somma di prodotti o come prodotto di somme per qualsiasi funzione logica. Esso si basa sull'applicazione sistematica a tutti i termini minimi della funzione della relazione:

$$f . x + f . \overline{x} = f$$

Il procedimento e' il seguente:

1) Si esprimono i termini minimi sostituendo ad ogni variabile diretta un 1 e ad ogni variabile negata uno 0. Ad esempio il termine minimo $\overline{x_1} . x_2 . x_3$ verra' rappresentato con 011.
2) Si suddividono tutti i termini minimi in gruppi aventi lo stesso numero di 1; tali raggruppamenti vengono chiamati livelli.
3) Si costruisce una tabella disponendo i livelli in ordine crescente ed associando a ciascun termine minimo il corrispondente numero decimale.
   Ad esempio i termini minimi:

   $\overline{x_1} . \overline{x_2} . \overline{x_3}$ $\quad$ $\overline{x_1} . \overline{x_2} . x_3$ $\quad$ $\overline{x_1} . x_2 . \overline{x_3}$ $\quad$ $\overline{x_1} . x_2 . x_3$ $\quad$ $x_1 . x_2 . x_3$

   danno luogo alla seguente tabella:

	Livello	Numero	Termine Minimo
ν	**0**	**0**	**000**
ν	**1**	**1**	**001**
		2	**010**
ν	**2**	**3**	**011**
ν	**3**	**7**	**111**

4) Si confrontano tutti i termini minimi del livello k con tutti quelli del livello k+1, semplificando tra loro i termini che differiscono per un solo bit. Si costruisce in tal modo una seconda tabella, nella quale le semplificazioni avvenute si indicano con una lineetta, mentre gli implicanti vengono contraddistinti con i numeri dei termini minimi che li hanno generati. Nella prima tabella si contrassegnano tutti i termini minimi che hanno dato luogo ad almeno una semplificazione.

Riferendosi all'esempio riportato poco piu' sopra, si ottiene la seguente tabella:

ν	**0, 1**	**0 0 -**
ν	**0, 2**	**0 - 0**
ν	**1, 3**	**0 - 1**
ν	**2, 3**	**0 1 -**
A	**3, 7**	**- 1 1**

mentre tutti i termini minimi originari vengono contrassegnati.

5) Nella seconda tabella si confrontano tutti i termini del livello k con tutti quelli del livello k+1. Sono ovviamente semplificabili tra loro i termini che differiscono per un solo bit e che siano gia' stati semplificati rispetto alla stessa variabile. Si costruisce in tal modo una terza tabella con le stesse modalita' esposte per la costruzione della seconda tabella. Nell'esempio che si sta trattando si ha:

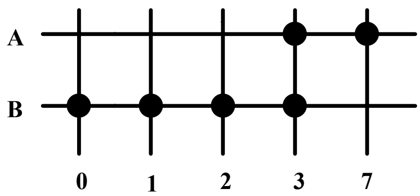
B 0, 1, 2, 3 0 - -

mentre nella seconda tabella il termine 3,7 non da' luogo a semplificazioni e non viene quindi contrassegnato.

6) Si prosegue in modo analogo, con la costruzione di tabelle successive, finche' non e' piu' possibile eseguire semplificazioni. Tutti i termini che nelle successive tabelle non sono stati contrassegnati vengono chiamati implicanti primi e la loro somma logica realizza senz'altro la funzione desiderata.
L'espressione minima di tale funzione si realizza pero' con un numero di implicanti inferiore a quello degli implicanti primi. Essa infatti si ricava come somma del minimo numero di implicanti primi con cui vengono implicati tutti i termini minimi della funzione.
Nell'esempio che si sta esaminando gli implicanti primi sono:

A = - 1 1 B = 0 - -

La scelta piu' opportuna degli implicanti primi necessari, che puo' divenire complessa gia' con un numero di variabili relativamente ridotto, avviene mediante l'uso di un reticolo, avente i termini minimi sulle colonne e gli implicanti primi sulle righe. Su ogni riga, in corrispondenza quindi a ciascun implicante, si contrassegnano opportunamente i termini minimi implicati.
Nell'esempio trattato si ottiene percio' il seguente reticolo:



Dall'esame del reticolo si individuano poi i termini minimi che sono implicati da un unico implicante primo.Ciascuno di essi diviene evidentemente essenziale nella realizzazione della funzione.

Ogni implicante essenziale cosi' individuato implica d'altra parte altri termini minimi che risultano automaticamente coperti e pertanto non vanno piu' considerati. E' semplice infine trovare, sia pure per tentativi, la copertura minima dei termini rimasti. Nell'esempio che si sta trattando ambedue gli implicanti primi A e B sono essenziali.

$$y = A + B = x_2 . x_3 + \overline{x_1}$$

Piu' significativo, soprattutto per quanto riguarda la realizzazione della copertura minima, e' l'esempio seguente.Si voglia semplificare la funzione

$$y = \sum (1,3,4,6,7,9,10,11,12,13,14,15)_m$$

La divisione dei termini minimi in livelli e il riordinamento dei livelli da' luogo alla seguente tabella:

1	**0 0 0 1**
4	**0 1 0 0**
3	**0 0 1 1**
6	**0 1 1 0**
9	**1 0 0 1**
10	**1 0 1 0**
12	**1 1 0 0**
7	**0 1 1 1**
11	**1 0 1 1**
13	**1 1 0 1**
14	**1 1 1 0**
15	**1 1 1 1**

Le successive tabelle di semplificazione sono riportate in fig 2.11.1, mentre il reticolo di scelta degli implicanti appare in fig. 2.11.2.

v	**1, 3**	**0**	**0**	**-**	**1**
v	**1, 9**	**-**	**0**	**0**	**1**
v	**4, 6**	**0**	**1**	**-**	**0**
v	**4, 12**	**-**	**1**	**0**	**0**
v	**3, 7**	**0**	**-**	**1**	**1**
v	**3, 11**	**-**	**0**	**1**	**1**
v	**6, 7**	**0**	**1**	**1**	**-**
v	**6, 14**	**-**	**1**	**1**	**0**
v	**9, 11**	**1**	**0**	**-**	**1**
v	**9, 13**	**1**	**-**	**0**	**1**
v	**10, 11**	**1**	**0**	**1**	**-**
v	**10, 14**	**1**	**-**	**1**	**0**
v	**12, 13**	**1**	**1**	**0**	**-**
v	**12, 14**	**1**	**1**	**-**	**0**
v	**7, 15**	**-**	**1**	**1**	**1**
v	**11, 15**	**1**	**-**	**1**	**1**
v	**13, 15**	**1**	**1**	**-**	**1**
v	**14, 15**	**1**	**1**	**1**	**-**

1, 3, 9, 11	**-**	**0**	**-**	**1**	←	**A**
4, 6, 12, 14	**-**	**1**	**-**	**0**	←	**B**
3, 7, 11, 15	**-**	**-**	**1**	**1**	←	**C**
6, 7, 14, 15	**-**	**1**	**1**	**-**	←	**D**
9, 11,13 , 15	**1**	**-**	**-**	**1**	←	**E**
10, 11, 14, 15	**1**	**-**	**1**	**-**	←	**F**
12, 13, 14, 15	**1**	**1**	**-**	**-**	←	**G**

figura 2.11.1

Dall'esame del reticolo risulta che il termine minimo 1 e' implicato solamente da A, quello 4 solo da B e quello 10 solo da F. Di conseguenza A,B,F sono implicanti primi essenziali. La loro scelta copre i termini minimi 1,3,4,6,9,10, 11,12,14,15. Per coprire i rimanenti termini minimi 7 e 13 si ì puo' scegliere per il primo l'implicante C o quello D,per il secondo quello E o quello G.

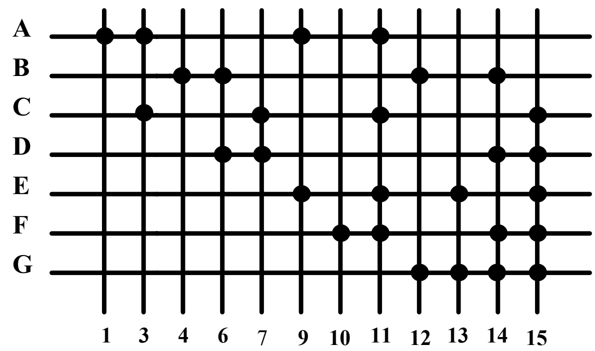


figura 2.11.2

Ci sono pertanto quattro realizzazioni equivalenti della funzione assegnata.

$$y = A+B+F+D+E = \overline{x_2}.x_4 + x_2.\overline{x_4} + x_1.x_3 + x_2.x_3 + x_1.x_4$$
$$y = A+B+F+D+G = \overline{x_2}.x_4 + x_2.\overline{x_4} + x_1.x_3 + x_2.x_3 + x_1.x_2$$
$$y = A+B+F+C+E = \overline{x_2}.x_4 + x_2.\overline{x_4} + x_1.x_3 + x_3.x_4 + x_1.x_4$$
$$y = A+B+F+C+G = \overline{x_2}.x_4 + x_2.\overline{x_4} + x_1.x_3 + x_3.x_4 + x_1.x_2$$

2.12) Le condizioni non specificate e le funzioni di funzione.

Nella sintesi di una funzione logica di n variabili si puo' presentare il caso in cui per k configurazioni delle variabili di ingresso sia assegnato il valore 1 alla funzione, per m configurazioni il valore 0 con $k+m < 2^n$. Le restanti 2^n - (m+k) configurazioni vengono dette condizioni non specificate o d.c.c. (don't care condition).

In pratica questa situazione si verifica ogni volta che in un circuito certe configurazioni di ingresso siano fisicamente impossibili o rendano priva di significato l'uscita, o, da un punto di vista strettamente analitico, quando una funzione y sia funzione delle variabili w_1 ,w_2 ,w_3 ,.....,w_m , ognuna delle quali e' a sua volta funzione delle variabili x_1 ,x_2 ,....,x_n .

Cioe'

$$y = F(w_1, w_2, ..., w_m)$$

con

$$w_i = F_i(x_1, x_2, ..., x_n) \qquad i = 1,2,....,m$$

Le condizioni non specificate si ricavano dalle tavole di verita' delle w_i , e sono tutte e sole le configurazioni delle w_i che non compaiono in tali tabelle.

Sia ad esempio:

$$y = f(w_1, w_2, w_3)$$

dove

$$w_1 = x_1 .(x_2 .x_3 + \overline{x_2}.\overline{x_3})$$
$$w_2 = x_4 .(x_2 .\overline{x_3} + \overline{x_2}.x_3)$$
$$w_3 = x_1 .x_2 .x_3 + \overline{x_1}.\overline{x_2}.\overline{x_3}$$

La tavola di verita' delle w_i e' riportata in fig. 2.12.1. Da essa si vede che le terne di possibili valori w_1 ,w_2 , w_3 sono 000, 001, 010, 100, 101. Ne consegue che la tavola di verita' della y conterra' condizioni non specificate in corrispondenza alle configurazioni di ingresso 011, 110, 111. Sulla tavola di verita' le condizioni non specificate vengono indicate con un trattino, nella forma canonica raccogliendo in parentesi i termini minimi corrispondenti, sulle mappe di Karnaugh contrassegnando con il simbolo ϕ la casella corrispondente a ciascuna condizione non specificata.

X_1	X_2	X_3	X_4	W_1	W_2	W_3
0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1	0
0	1	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	0	1	1	0	1	0
1	1	0	0	0	0	0
1	1	0	1	0	1	0
1	1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	0	1

figura 2.12.1

Le condizioni non specificate possono venir sfruttate nelle semplificazioni in modo da pervenire ad espressioni minime piu' semplici. Se si opera con le mappe di Karnaugh, le semplificazioni vanno ancora fatte in modo da coprire tutte le caselle contrassegnate con un 1, ma ciascun raggruppamento di caselle adiacenti puo' contenere quante si vogliano caselle □. Si assegna cioe' alle condizioni non specificate il valore 1 o 0 a seconda che esse tornino o meno utili per eseguire raggruppamenti piu' ampi. Si abbia ad esempio la seguente funzione:

X_3X_4 \ X_1X_2	00	01	11	10
00	1	1	ϕ	ϕ
01			ϕ	
11			1	ϕ
10			ϕ	1

Senza considerare le condizioni d.c.c. si otterrebbe:

$$y = \overline{x_1}.\overline{x_3}.\overline{x_4} + x_1.x_2.x_3.x_4 + x_1.\overline{x_2}.x_3.\overline{x_4}$$

mentre tenendo conto anche di queste ultime si ha:

$$y = \overline{x_3}.\overline{x_4} + x_1.x_3$$

Qualora si operi invece con il metodo tabellare di Quine-McCluskey la tabella iniziale va costruita a partire sia dai termini minimi, in corrispondenza ai quali la funzione vale 1, sia dalle condizioni non specificate. Il reticolo per la scelta delle copertura minima va invece realizzato senza tener conto delle d.c.c. In fig. 2.12.2 sono riportate le successive tabelle di semplificazione della stessa funzione dell'esempio precedente, mentre in fig. 2.12.3 vi e' il reticolo di scelta degli implicanti.

v	0	0 0 0 0
v	4	0 1 0 0
v	8	1 0 0 0
v	10	1 0 1 0
v	12	1 1 0 0
v	11	1 0 1 1
v	13	1 1 0 1
v	14	1 1 1 0
v	15	1 1 1 1

v	0,4	0 - 0 0
v	0,8	- 0 0 0
v	4,12	- 1 0 0
v	8,12	1 - 0 0
v	8,10	1 0 - 0
v	12,13	1 1 0 -
v	12,14	1 1 - 0
v	10,11	1 0 1 -
v	10,14	1 - 1 0
v	13,15	1 1 - 1
v	11,15	1 - 1 1
v	14,15	1 1 1 1

0, 4, 8, 12	- - 0 0	A
8, 10, 12, 14	1 - - 0	B
12, 13, 14, 15	1 1 - -	C
10, 11, 14, 15	1 - 1 -	D

figura 2.12.2

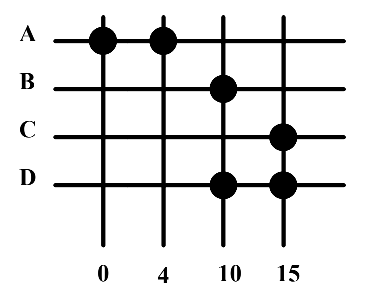


figura 2.12.3

2.13) Funzioni simmetriche.

La simmetria logica e' una proprieta' che esiste in certe funzioni logiche e che le rende atte ad essere implementate con particolari tecniche. Tali funzioni vengono chiamate funzioni simmetriche, hanno una particolare importanza nel progetto logico e formano un'importante classe di funzioni.

Poiche' per esse esistono particolari tecniche di progetto e' notevolmente importante riconoscere quando una funzione e' simmetrica. Infatti l'implementazione di una funzione simmetrica che non faccia ricorso a tali tecniche e' di solito difficoltosa, in quanto i normali metodi di semplificazione non conducono usualmente ad alcuna minimizzazione.

Una funzione logica di n variabili x_1 ,x_2 ,.....,x_n e' detta simmetrica se un qualsiasi scambio tra queste variabili lascia inalterata la funzione stessa. Se questa proprieta' si estende a tutte le variabili la funzione e' detta **totalmente simmetrica**; se invece si estende solo ad un

sottoinsieme delle n variabili essa e' **parzialmente simmetrica**; infine se la simmetria esiste solo per **un sottoinsieme della funzione** essa e' detta **simmetrica indipendente**.

L'intercambiabilita' fra le variabili puo' esistere tra i valori nominali (x_i e x_j), tra i valori negati ($\overline{x_i}$ e $\overline{x_j}$) oppure puo' essere mista (x_i e $\overline{x_j}$ oppure $\overline{x_i}$ e x_j).

In definitiva una funzione di commutazione:

$$f(x_1^{j_1}, x_2^{j_2}, \ldots., x_n^{j_n})$$

e' simmetrica rispetto le variabili $x_1^{j_1}, x_2^{j_2}, \ldots., x_n^{j_n}$ se e solamente se rimane inalterata per qualsiasi permutazione tra queste variabili, potendo j_i assumere solamente i valori 0 e 1 ed essendo:

$$x_i^{j_i} = x_i \quad \text{se} \quad j_i = 0 \qquad\qquad x_i^{j_i} = \overline{x_i} \quad \text{se} \quad j_i = 1$$

Si consideri ad esempio la funzione:

$$f(x, y, z) = x.\overline{y}.\overline{z} + \overline{x}.y.\overline{z} + \overline{x}.\overline{y}.z + x.y.z \qquad (2.13.1)$$

Poiche' essa e' funzione di tre variabili sono sufficienti sei permutazioni per verificare se la funzione rimane invariata. La forma che la funzione assume per ciascuna permutazione delle variabili e' riportata in tabella 2.13.1

TABELLA 2.13.1

PERMUTAZIONE			**FUNZIONE**
x ↔ x	**y ↔ y**	**z ↔ z**	$\mathbf{x.\overline{y}.\overline{z} + \overline{x}.y.\overline{z} + \overline{x}.\overline{y}.z + x.y.z}$
x ↔ y	**y ↔ z**	**z ↔ x**	$\mathbf{y.\overline{z}.\overline{x} + \overline{y}.z.\overline{x} + \overline{y}.\overline{z}.x + y.z.x}$
x ↔ y	**y ↔ x**	**z ↔ z**	$\mathbf{y.\overline{x}.\overline{z} + \overline{y}.x.\overline{z} + \overline{y}.\overline{x}.z + y.x.z}$
x ↔ z	**z ↔ y**	**y ↔ z**	$\mathbf{z.\overline{x}.\overline{y} + \overline{z}.x.\overline{y} + \overline{z}.\overline{x}.y + z.x.y}$
x ↔ x	**y ↔ z**	**z ↔ y**	$\mathbf{x.\overline{z}.\overline{y} + \overline{x}.z.\overline{y} + \overline{x}.\overline{z}.y + x.z.y}$
x ↔ z	**y ↔ y**	**z ↔ x**	$\mathbf{z.\overline{y}.\overline{x} + \overline{z}.y.\overline{x} + \overline{z}.y.\overline{x} + z.y.x}$

Risulta chiaro che la funzione rimane immutata per ciascuna permutazione e quindi essa e', secondo la definizione, una funzione simmetrica.

La funzione

$$x.\overline{y}.z + \overline{x}.y.z + \overline{x}.\overline{y}.\overline{z} \qquad (2.13.2)$$

e' ancora simmetrica, ma in questo caso le variabili di simmetria sono $x, y, \overline{z}$. Cio' e' particolarmente chiaro se si pone:

$$q = \overline{z}$$

e quindi la funzione diviene

$$x.\overline{y}.\overline{q}+\overline{x}.y.\overline{q}+\overline{x}.\overline{y}.q$$

evidentemente simmetrica nelle variabili x, y, q. E' abbastanza immediato da questo esempio rendersi conto che non e' semplice individuare funzioni simmetriche di variabili dirette e negate.

Nelle figure 2.13.1, 2.13.2 e 2.13.3 sono riportati gli esempi dei tre tipi di simmetria definiti piu' sopra.

AB \ CD	00	01	11	10
00				
01		1		
11	1		1	
10		1		

Funzione totalmente simmetrica
Esiste un'intercambiabilita' tra le variabili A, B, $\overline{C}$, D

fig. 2.13.1

AB \ CD	00	01	11	10
00				
01				
11	1		1	
10		1		

Funzione parzialmente simmetrica
L'intercambiabilita' esiste solo tra le variabili $\overline{B}$, C, D

fig. 2.13.2

E = 0

AB \ CD	00	01	11	10
00		1		
01	1		1	
11		1		
10				

E = 1

AB \ CD	00	01	11	10
00				1
01	1		1	
11				1
10				

Funzione a simmetria indipendente
Nel sottoinsieme E = 0 esiste un'intercambiabilita' tra le variabili
$\overline{A}$, B , $\overline{C}$, D
mentre nel sottoinsieme E = 1 l'intercambiabilita' si ha tra le variabili
$\overline{A}$, B , C , $\overline{D}$

fig. 2.13.3

Le funzioni simmetriche godono di parecchie proprieta' interessanti, che sono messe in luce nei seguenti teoremi.

<u>Teorema 1</u>: Come e' gia' stato implicitamente detto, il valore di una funzione simmetrica dipende solamente dal numero e non da quali variabili di simmetria valgono 1.

Formalmente tale proprieta' e' espressa dal seguente teorema.

Condizione necessaria e sufficiente affinche' una funzione di commutazione di n variabili sia simmetrica e' che essa possa essere individuata da un insieme di interi $\{a_k\}$ con $0< a_k < n$, in modo che se esattamente a_m (m = 1,2, ..., k) delle variabili valgono 1, la funzione valga 1, mentre valga 0 negli altri casi.

La necessita' si dimostra supponendo che la funzione valga 1 quando le prime a_j variabili valgono 1, mentre valga 0 se altre a_j variabili valgono 1. Si supponga ora di permutare ciascuna delle a_j variabili del primo insieme con una delle variabili del secondo insieme. Considerando le ipotesi fatte, si ricava un valore differente e quindi una differente funzione. La funzione pertanto non e' simmetrica.

La sufficienza si dimostra supponendo che la funzione valga 1 se e solamente se esattamente a_m variabili valgono 1. Poiche' la funzione vale 1 per qualsiasi permutazione delle variabili, purche' a_j di esse valgano 1, qualsiasi sia a_m in $\{a_k\}$, allora essa e' per definizione simmetrica.

Si puo' allora esprimere qualunque funzione simmetrica nella forma:

$$S^n_{\{a_k\}}(x_1^{j_1}, x_2^{j_2}, ..., x_n^{j_n})$$

dove $x_1^{j_1}, x_2^{j_2}, ..., x_n^{j_n}$ sono le variabili di simmetria, n e' il numero di variabili e ciascun elemento dell'insieme $\{a_k\}$ e' detto livello di simmetria. In pratica ciascun elemento a_k indica il numero di variabili che devono essere poste a 1 affinche' la funzione valga 1.

E' abbastanza evidente che i livelli di simmetria possono essere piu' d'uno. Ad esempio la funzione (2.13.1) puo' essere scritta come:

$$S^3_{\{1,3\}}(x, y, z)$$

mentre la (2.13.2) e'

$$S^3_{\{1\}}(x, y, \bar{z})$$

<u>Teorema 2</u>: La somma di piu' funzioni simmetriche delle stesse variabili e' ancora una funzione simmetrica avente come livelli di simmetria tutti i livelli delle funzioni simmetriche di partenza.

$$S^n_{\{a_1,...,a_j,b_1,...b_m\}}(x_1^{j_1}, x_2^{j_2}, ..., x_n^{j_n}) + S^n_{\{a_1,...,a_j,c_1,...,c_n\}}(x_1^{j_1}, x_2^{j_2}, ..., x_n^{j_n}) =$$

$$= S^n_{\{a_1,...,a_j,b_1,...,b_m,c_1,...,c_n\}}(x_1^{j_1}, x_2^{j_2}, ..., x_n^{j_n})$$

Ad esempio:

$$S_0^4(x,y,z,w)+S_3^4(x,y,z,w)+S_4^4(x,y,z,w)=$$

$$S_{\{0,3,4\}}^4(x,y,z,w)=\bar{x}.\bar{y}.\bar{z}.\bar{w}+x.y.z.\bar{w}+x.y.\bar{z}.w+x.\bar{y}.z.w+\bar{x}.y.z.w+x.y.z.w$$

La dimostrazione del teorema e' intuitiva.

<u>Teorema 3</u>: Il prodotto di piu' funzioni simmetriche delle stesse variabili e' ancora una funzione simmetrica i cui livelli di simmetria sono solamente quelli comuni a tutte le funzioni di partenza.

$$S_{\{a_1,\dots,a_j,b_1,\dots,b_m\}}^n(x_1^{j_1},x_2^{j_2},\dots,x_n^{j_n}).S_{\{a_1,\dots,a_j,c_1,\dots,c_m\}}^n(x_1^{j_1},x_2^{j_2},\dots,x_n^{j_n})=$$

$$=S_{\{a_1,\dots,a_j\}}^n(x_1^{j_1},x_2^{j_2},\dots,x_n^{j_n})$$

La dimostrazione e' intuitiva. Ad esempio:

$$S_0^4(x,y,z,w).S_{\{0,4\}}^4(x,y,z,w)=S_0^4(x,y,z,w)=\bar{x}.\bar{y}.\bar{z}.\bar{w}.(\bar{x}.\bar{y}.\bar{z}.\bar{w}+x.y.z.w)=\bar{x}.\bar{y}.\bar{z}.\bar{w}$$

<u>Teorema 4</u>: La negazione di una funzione simmetrica di n variabili e di livelli $\{a_k\}$ e' ancora una funzione simmetrica di n variabili il cui insieme di livelli di simmetria $\{a_j\}$ e' il complemento dell'insieme $\{a_k\}$.

$$\overline{S_{\{a_1,\dots,a_k\}}^n}(x_1^{j_1},x_2^{j_2},\dots,x_n^{j_n})=S_{C\{a_1,\dots,a_k\}}^n(x_1^{j_1},x_2^{j_2},\dots,x_n^{j_n})$$

Ad esempio:

$$\overline{S_{\{1,2,3,6\}}^6}(x_1,x_2,\dots,x_6)=S_{\{0,4,5\}}^6(x_1,x_2,\dots,x_6)$$

La funzione $S_{\{0,4,5\}}(x_1,\dots,x_6)$ vale infatti 1 quando nessuna, quattro o cinque delle sue variabili valgono 1.

Viceversa, nelle stesse condizioni e solamente in queste la $S_{\{1,2,3,6\}}(x_1,\dots,x_6)$ vale 0 e quindi la sua negazione coincide con la $S_{\{0,4,5\}}(x_1,\dots,x_6)$.

<u>Teorema 5</u>: Negando le variabili di una funzione simmetrica si ottiene ancora una funzione simmetrica i cui livelli di simmetria sono il complemento a n dei livelli originari.

$$S^n_{\{a_1,\dots,a_k\}}(x_1^{j_1}, x_2^{j_2}, \dots, x_n^{j_n}) = S^n_{\{n-a_1,\dots,n-a_k\}}(x_1^{1-j_1}, x_2^{1-j_2}, \dots, x_n^{1-j_n})$$

Infatti se a_i delle variabili valgono 1, allora n-a_i delle stesse variabili valgono 0 e n-a_i delle variabili negate valgono 1. Ne segue che i due membri dell'espressione precedente sono uguali per qualunque insieme di valori delle variabili.

Ad esempio:

$$S^4_{\{2,3\}}(A,B,C,D) = \overline{A}.\overline{B}.C.D + \overline{A}.B.\overline{C}.D + \overline{A}.B.C.\overline{D} + A.\overline{B}.\overline{C}.D +$$
$$+ A.\overline{B}.C.\overline{D} + A.B.\overline{C}.\overline{D} + \overline{A}.B.C.D + A.\overline{B}.C.D + A.B.\overline{C}.D + A.B.C.\overline{D} =$$
$$= S^4_2(\overline{A},\overline{B},\overline{C},\overline{D}) + S^4_1(\overline{A},\overline{B},\overline{C},\overline{D}) = S^4_{\{4-2,4-3\}}(\overline{A},\overline{B},\overline{C},\overline{D})$$

Teorema 6: Qualsiasi funzione simmetrica
$S^n_{\{a_1,a_2,\dots,a_k\}}(x_1^{j_1}, x_2^{j_2}, \dots, x_n^{j_n})$
puo' essere rappresentata come somma logica di un sottoinsieme delle seguenti funzioni simmetriche elementari.

$$d_0 = x_1^{1-j_1}.x_2^{1-j_2}\dots x_n^{1-j_n}$$
$$d_1 = x_1^{j_1}.x_2^{1-j_2}\dots x_n^{1-j_n} + x_1^{1-j_1}.x_2^{j_2}\dots x_n^{1-j_n} + \dots + x_1^{1-j_1}.x_2^{1-j_2}\dots x_n^{j_n}$$
....
....
$$d_n = x_1^{j_1}.x_2^{j_2}\dots x_n^{j_n}$$

La generica funzione elementare δ_k e' formata da $\binom{n}{k}$ termini contenenti ciascuno k variabili affermate e n-k variabili negate. La dimostrazione del teorema e' immediata ricorrendo ai teoremi 1 e 2.

Il teorema appena enunciato permette di impostare in maniera estremamente semplice tutta una classe di problemi di progetto. Si supponga ad esempio di avere un sistema di comunicazione che utilizzi 16 linee in parallelo per la trasmissione di messaggi formati da quattro caratteri, codificati ciascuno con quattro bit. Su questi caratteri venga eseguito il test di parita' e sia richiesta la ritrasmissione del messaggio quando due o piu' di essi non rispettino la parita'. Si indichino con x_1, x_2, x_3, x_4; y_1, y_2, y_3, y_4; z_1, z_2, z_3, z_4; w_1, w_2, w_3, w_4 i bit dei quattro caratteri. E' evidentemente molto semplice scrivere la funzione di test di parita' per ciascun insieme di quattro bit sotto forma di funzione simmetrica. Riferendosi alla parola X si ha:

$$P_X = S^4_{\{1,3\}}(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

Allo stesso modo, la funzione che richiede la ripetizione del messaggio quando due o piu' test di parita' abbiano dato esito negativo, e' ancora una funzione simmetrica.

$$F = S^{4}_{\{2,3,4\}}(P_x, P_y, P_z, P_w)$$

Come si e' gia' detto, un qualsiasi scambio tra le variabili di simmetria lascia inalterata una funzione simmetrica. D'altra parte, sulla base del teorema 5, una funzione simmetrica possiede due set di variabili di simmetria. Ad esempio la funzione illustrata in fig. 2.13.1 e' simmetrica rispetto alle variabili A, B, C, D. Tuttavia anche le variabili $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D}$ presentano le stesse proprieta', come e' immediato verificare e come discende dal fatto che la stessa funzione puo' essere rappresentata come

$$f(A,B,C,D) = S^4_3(A,B,C,D) = S^4_1(\overline{A},\overline{B},\overline{C},\overline{D}) \qquad (2.13.4)$$

Questi due set di variabili rappresentano quelli che vengono chiamati centri della simmetria e sono rappresentabili con il numero associato al relativo termine minimo (nel caso in questione 13 e 2).

I centri di simmetria possono essere messi in evidenza riportando la funzione su una qualsiasi mappa logica. Si ricava in tal caso una configurazione simmetrica e tutti gli elementi della simmetria ricavata sono equidistanti dai due centri di simmetria.

La funzione riportata sulla mappa di Karnaugh in fig. 2.13.1 realizza una configurazione evidentemente simmetrica rispetto ai termini minimi 13 e 2. Rispetto al centro 13 tutti i quattro elementi hanno distanza unitaria, mentre rispetto al centro 2 la distanza e' 3.

Si noti che il livello di simmetria e' il complemento a n della distanza cosi' determinata.

2.14) Il riconoscimento delle funzioni simmetriche.

2.14.1) Funzioni totalmente simmetriche.

Esistono diversi metodi atti a mettere in luce se una funzione booleana e' simmetrica. Nel seguito verranno presentati due di questi metodi, senza tuttavia darne una dimostrazione formalmente esatta e completa, che a questo livello appare abbastanza complessa e di scarso interesse.

a) PRIMO METODO.

Si supponga in un primo tempo che le variabili di simmetria siano tutte affermate e che si abbia a che fare con una funzione simmetrica elementare.

Si sostituisca nei vari termini minimi componenti la funzione un 1 ad ogni variabile affermata e uno 0 ad ogni variabile negata e si costruisca una matrice avente tante colonne quante sono le variabili e tante righe quanti sono i termini minimi. Se la funzione e' una funzione simmetrica elementare, dal teorema 6 si sa che il numero di termini e' pari alle combinazioni di n elementi in classe k.

Accanto ad ogni riga si scriva il numero k di variabili affermate, cioe' il livello, mentre sotto ogni colonna si riporti il valore del rapporto r tra il numero di 1 e di 0 nella colonna stessa.

Se la funzione considerata e' simmetrica del tipo ipotizzato, k e r sono costanti rispettivamente sulle righe e sulle colonne e deve essere rispettata la relazione

$$n.r = k.(r+1) \qquad (2.14.1)$$

Se infatti la funzione e',come in ipotesi, una funzione simmetrica elementare, con variabili di simmetria tutte affermate, la tabella costruita conterra', come detto,$\binom{n}{k}$ righe in ciascuna delle quali compariranno k simboli 1 e n-k simboli 0.

D'altra parte gli 1 contenuti in ciascuna colonna saranno, indicando il loro numero con C_1

$$C_1 = \binom{n-1}{k-1}$$

E' infatti questo il numero delle righe contenenti k variabili affermate che si possono costruire fissando la posizione di una di esse e distribuendo gli altri k-1 simboli 1 sulle rimanenti n-1 posizioni.

Il numero di zeri, C_0 , presenti nella colonna, e' per gli stessi motivi

$$C_0 = \binom{n-1}{k}$$

ed evidentemente

$$C_1 + C_0 = \binom{n}{k}$$

Si ottiene percio'

$$r = \frac{C_1}{C_0} = \frac{\binom{n-1}{k-1}}{\binom{n-1}{k}} = \frac{k}{n-k} \qquad (2.14.2)$$

E' bene notare che tale rapporto coincide con quello tra il numero di 1 e di zeri presenti in ciascuna riga. Manipolando opportunamente la (2.14.2) si ottiene finalmente:

$$n.r = k.(r+1)$$

Si abbia ad esempio la funzione

$$F = \bar{x}.y.z + x.\bar{y}.z + x.y.\bar{z}$$

La corrispondente matrice e':

0	**1**	**1**	**2**
1	**0**	**1**	**2**
1	**1**	**0**	**2**
2	**2**	**2**	

con n=3, k=2, r=2. Per tale funzione vale la 2.14.1

$$n.r = 3.2 = 2.(2 + 1) = k.(r + 1)$$

In generale, se la funzione e' simmetrica a piu' livelli di simmetria, si devono avere $\binom{n}{k}$ righe per ogni livello, per ogni livello devono essere costanti r e k e deve valere la (2.14.1). Si abbia ad esempio la funzione

$$f = x.y.\bar{z}.\bar{w} + x.\bar{y}.z.\bar{w} + \bar{x}.y.z.\bar{w} + x.\bar{y}.\bar{z}.w + \bar{x}.y.\bar{z}.w + \bar{x}.\bar{y}.z.w +$$
$$+ x.y.z.\bar{w} + x.y.\bar{z}.w + x.\bar{y}.z.w + \bar{x}.y.z.w$$

La relativa matrice e'

$$\begin{array}{cccc|c}
\mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\
\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\
\mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\
\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\
\mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\
\mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \\
\mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\
\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\
\mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\
\hline
\frac{\mathbf{6}}{\mathbf{4}} & \frac{\mathbf{6}}{\mathbf{4}} & \frac{\mathbf{6}}{\mathbf{4}} & \frac{\mathbf{6}}{\mathbf{4}} &
\end{array}$$

Essendo costante r, ma non k si suddivide la matrice nelle due sottomatrici

$$\begin{array}{cccc|c}
\mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\
\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\
\mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\
\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\
\mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\
\hline
\mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccc|c}
\mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \\
\mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\
\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\
\mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\
\hline
\mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{3} &
\end{array}$$

per ciascuna delle quali k e r sono costanti e vale la (2.14.1). Si ha pertanto:

$$f = S^4_{\{2,3\}}(x, y, z, w)$$

Se qualcuna delle n variabili di simmetria e' negata, nella matrice evidentemente non sono costanti ne' r ne' k. Ci sono pero' due soli valori di r (r' e r''), uno il reciproco dell'altro. Negando le variabili delle colonne relative ad uno di questi due valori, i rapporti r' e r'' tornano uguali, si ha per ogni riga lo stesso livello k e vale la (2.14.1).

Si abbia da esempio:

$$f = x.y.z + \bar{x}.\bar{y}.z + \bar{x}.y.\bar{z}$$

La relativa matrice e':

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline \frac{1}{2} & 2 & 2 & \end{array}$$

Negando le variabili della colonna in cui il rapporto r vale 1/2 si ottiene la matrice di fig. 2.14.1.a, mentre con la negazione delle altre colonne si ottiene la matrice di fig. 2.14.1.b.

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ \hline 2 & 2 & 2 & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \end{array}$$

(a) (b)

figura 2.14.1

per ciascuna delle quali r e k sono costanti e vale la 2.14.1. Si puo' quindi concludere che

$$F = S_2^3(\bar{x}, y, z) = S_1^3(x, \bar{y}, \bar{z})$$

Il criterio esposto, relativamente semplice, cade pero' in difetto quando si abbia contemporaneamente n pari, k=n/2 e le variabili di simmetria non siano tutte affermate. In questo caso infatti, pur essendo r costante, non sono rispettate le altre condizioni. Si consideri ad esempio la funzione:

$$f = \bar{x}.\bar{y}.z.\bar{w} + \bar{x}.y.\bar{z}.\bar{w} + \bar{x}.y.z.w + x.\bar{y}.\bar{z}.\bar{w} + x.\bar{y}.z.w + x.y.\bar{z}.w$$

che da' origine alla matrice

$$\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & \end{array}$$

la quale, anche se separata nelle due sottomatrici, relativa ciascuna ad uno dei due possibili livelli, porterebbe a concludere che la funzione non e' simmetrica. Il caso tuttavia e' dubbio in quanto il numero delle variabili e' n = 4 e r e' costante.

Si ricorre allora all'artificio di espandere la funzione secondo una variabile qualsiasi, ad esempio la prima, dividendo i termini della funzione in due gruppi, ciascuno relativo ad uno dei valori della variabile di espansione.

Si ottiene pertanto:

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ \hline 2 & 2 & \frac{1}{2} & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 & \end{array}$$

$$x = 0 \qquad\qquad\qquad x = 1$$

Complementando la terza colonna si ottiene:

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ \hline 2 & 2 & 2 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \end{array}$$

Infine ricomponendo la matrice si ha :

$$\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & \end{array}$$

Si puo' allora concludere che:

$$F = S_2^4(x, y, z, \overline{w})$$

b) SECONDO METODO.

Il metodo presentato e' stato originariamente sviluppato da E.R.Robbins dell'Universita' di stato dell'Arizona e successivamente perfezionato da G.K. Kostopoulos delle Honeywell inc.

E' un metodo abbastanza semplice, che presenta il vantaggio di richiedere unicamente calcoli in notazione decimale.

Il metodo e' il seguente:

PASSO 1: Per identificare i due centri di simmetria si usa la seguente equazione:

$$\text{Centro piu' vicino} = \frac{1}{2}\left[(2^n - 1) - \frac{m.(2^n - 1) - 2.\sum_{1}^{m} k}{m - 2.e}\right]$$

dove n e' il numero di variabili, m il numero di termini minimi della funzione, e il numero di termini minimi pari e k i numeri decimali associabili a ciascun termine minimo.

$$\text{Centro piu' lontano} = (2^n - 1) - \text{centro piu' vicino}$$

PASSO 2: Si convertono tutti i termini e il centro in una somma di potenze di 2. Si confrontano le potenze di 2 di ciascun termine con quelle del centro, conteggiando il numero di differenti potenze, valutando cioe' la distanza dal centro. Si determina infine il numero di termini che hanno la stessa distanza dal centro.

PASSO 3: Si calcola il numero di termini equidistanti dal centro che la funzione deve avere per essere simmetrica. Essi devono essere in numero pari a:

$$\frac{n!}{(n - d)!d!}$$

dove n e' il numero di variabili e d la distanza dal centro. Se tale relazione non e' rispettata la funzione non e' simmetrica.

PASSO 4: Si calcolano i parametri della simmetria, cioe' le coordinate del centro, le variabili di simmetria ottenute dalle coordinate del centro e i livelli di simmetria ottenuti come complemento a n delle distanze dei vari termini.

Si voglia ad esempio verificare se la funzione

$$f(A,B,C,D) = \sum(7,11,13,14,15)_m$$

e' simmetrica. Se cio' e' vero, si determinino centri, variabili di simmetria e distanze.

PASSO 1.

$$\text{Centro piu' vicino} = \frac{1}{2}\left[15 - \frac{5.15 - 2.(7 + 11 + 13 + 14 + 15)}{5 - 2.1}\right] = 15$$

PASSO 2.

centro 15 $= 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0$
termine minimo 7 $= 2^2 + 2^1 + 2^0$
termine minimo 11 $= 2^3 + 2^1 + 2^0$
termine minimo 13 $= 2^3 + 2^2 + 2^0$
termine minimo 14 $= 2^3 + 2^2 + 2^1$
termine minimo 15 $= 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0$

PASSO 3.

Dal passo 2 si vede che vi sono quattro termini a distanza 1 dal centro e un termine a distanza 0. Ora i termini a distanza 1 dal centro devono essere in numero di

$$\frac{n!}{(n-d)!d!} = \frac{4!}{3!1!}$$

mentre per i termini a distanza 0 si ha:

$$\frac{n!}{(n-d)!d!} = \frac{4!}{4!0!}$$

PASSO 4.

La funzione esaminata e' pertanto una funzione totalmente simmetrica e i parametri della simmetria sono:

centro piu' vicino = 15
centro piu' lontano = $(2^4 - 1) - 15 = 0$
variabili di simmetria = A, B, C, D e $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D}$
livelli di simmetria relativi al primo centro = 3,4
livelli di simmetria relativi al secondo centro = 0,1

In definitiva quindi la funzione assegnata puo' essere rappresentata nel modo seguente:

$$f(A,B,C,D) = S^4_{\{0,1\}}(\overline{A},\overline{B},\overline{C},\overline{D}) = S^4_{\{3,4\}}(A,B,C,D)$$

2.14.2) Funzioni parzialmente simmetriche.

Quando dalle procedure esposte risulta che una funzione

$$f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

non e' totalmente simmetrica, rimane la possibilita' che per tale funzione esista una simmetria parziale o una simmetria indipendente.

Per individuare tale simmetria si puo' usare la seguente procedura.

PASSO 1: si esegua la parte (a) e (b) di questo passo per un numero di volte pari a $\binom{n}{n-1}$, scegliendo di volta in volta una differente variabile x_k.

a) Si esegua una partizione della funzione data in:

$$\overline{x_k}.g(x_i;i=1,n;i\neq k)+x_k.h(x_1;i=1,n;i\neq k)$$

b) Si esegua su g e h il test per l'individuazione della simmetria totale. Se le funzioni g e h sono totalmente simmetriche per lo stesso insieme di variabili di simmetria, allora la funzione $f(x_1, \ldots, x_n)$ e' parzialmente simmetrica. Le variabili di simmetria parziale sono quelle per cui g e h sono totalmente simmetriche.

Se viceversa g e h non sono a simmetria totale per il medesimo insieme di variabili, allora la funzione $f(x_1, \ldots, x_n)$ non e' parzialmente simmetrica nelle variabili:

$$(x_i;i=1,n;i\neq k)$$

Se tutti i test eseguiti nel presente passo indicano che non esiste alcuna simmetria parziale in n-1 variabili si prosegue con il

PASSO 2: Si esegua la parte (a) e (b) di questo passo un numero di volte pari a $\binom{n}{n-2}$ scegliendo di volta in volta una differente coppia di variabili x_l e x_k.

a) Si esegua la partizione delle funzione data in:

$$\begin{aligned}&\overline{x_l}.\overline{x_k}.p(x_i;i=1,n;i\neq l;i\neq k)+\overline{x_l}.x_k.q(x_i;i=1,n;i\neq l;i\neq k)+\\&+x_l.\overline{x_k}.r(x_i;i=1,n;i\neq l;i\neq k)+x_l.x_k.s(x_i;i=1,n;i\neq l;i\neq k)\end{aligned}$$

b) Si esegua su p, q, r, s il test per l'individuazione della simmetria totale. Se tutte le quattro funzioni sono totalmente simmetriche per lo stesso insieme di variabili di simmetria, allora la funzione $f(x_1, \ldots, x_n)$ e' parzialmente simmetrica. Le variabili di simmetria parziale sono quelle per cui p, q, r, s sono totalmente simmetriche.

Se viceversa p, q, r, s non sono totalmente simmetriche per il medesimo insieme di variabili, allora la funzione $f(x_1, \ldots, x_n)$ non e' parzialmente simmetrica nelle variabili

$$(x_i;i=1,n;i\neq l;i\neq k)$$

Se tutti i test eseguiti nel presente passo indicano che non esiste alcuna simmetria parziale in n-2 variabili, si aggiunge una terza variabile all'insieme delle variabili di partizione e si prosegue allo stesso modo fino a trovare una simmetria parziale o finche' il numero delle variabili nelle funzioni che si ricavano dalla partizione non si riduce a 2.

Si consideri ad esempio la seguente funzione:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum(1,2,7,8,9,13,14)_m$$

Come prima cosa e' necessario verificare se tale funzione e' totalmente simmetrica. Si ha:

$$\begin{array}{cccc|c}
0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 3 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\
\hline
\frac{4}{3} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{4}{3} &
\end{array}$$

Poiche' esistono due valori di r, uno il reciproco dell'altro, si negano, ad esempio, le variabili della prima e della quarta colonna, ottenendo:

$$\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\
\hline
\frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} &
\end{array}$$

La matrice ottenuta va divisa in tre sottomatrici, ciascuna relativa ad uno dei possibili livelli di simmetria.

Si ha:

$$\begin{array}{cccc|c}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\
\hline
2 & 2 & 3 & 2 &
\end{array}$$

e si puo' quindi concludere che la funzione in esame non e' totalmente simmetrica. Si puo' allora indagare se la funzione e' parzialmente simmetrica in n-1 = 3 variabili. E' necessario quindi eseguire quattro volte il test di cui al punto 1 delle procedura piu' sopra illustrata, escludendo di volta in volta una delle quattro variabili.

Si esegue la partizione

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\overline{x_1}.g(x_2,x_3,x_4)+x_1.h(x_2,x_3,x_4)$$

Per quanto riguarda la funzione $h(x_2,x_3,x_4)$ si ottiene la seguente matrice:

$$\begin{array}{ccc|c}
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\
\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\
\mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\
\hline
\mathbf{1} & \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} & \mathbf{1} &
\end{array}$$

La presenza in tale matrice di due valori r' e r" che non sono reciproci esclude la simmetria totale di tale funzione rispetto alle variabili x_2, x_3, x_4.

Si passa allora alla partizione:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\overline{x_2}.g(x_1,x_3,x_4)+x_2.h(x_1,x_3,x_4)$$

In questo caso si ha per la funzione g una situazione analoga alla precedente. Infatti:

$$\begin{array}{ccc|c}
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\
\mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\
\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\
\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\
\hline
\mathbf{1} & \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} & \mathbf{1} &
\end{array}$$

Pertanto per le medesime considerazioni si esclude la simmetria totale per la funzione $g(x_1,x_3,x_4)$ rispetto alle variabili x_1, x_3, x_4.

Considerando la partizione:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\overline{x_3}.g(x_1,x_2,x_4)+x_3.h(x_1,x_2,x_4)$$

si ottengono le seguenti due matrici

$$\begin{array}{ccc|c}
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\
\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\
\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\
\mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\
\hline
\mathbf{3} & \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} & \mathbf{3} &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc|c}
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\
\mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\
\hline
\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} & \mathbf{2} & \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} &
\end{array}$$

Invertendo la variabile della seconda colonna in ambedue le matrici si ottiene:

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline 3 & 3 & 3 & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \end{array}$$

Le verifiche successive secondo la 2.14.1 portano a concludere che:

$$g(x_1, x_2, x_4) = S^3_{\{2,3\}}(x_1, \overline{x_2}, x_4) = S^3_{\{0,1\}}(\overline{x_1}, x_2, \overline{x_4})$$
$$h(x_1, x_2, x_4) = S^3_1(x_1, \overline{x_2}, x_4) = S^3_2(\overline{x_1}, x_2, \overline{x_4})$$

Pertanto ambedue le funzioni sono totalmente simmetriche rispetto allo stesso insieme di variabili di simmetria. Di conseguenza la funzione assegnata e' parzialmente simmetrica nelle variabili $x_1, \overline{x_2}, x_4$ o $\overline{x_1}, x_2, \overline{x_4}$.

Se infine si considera la partizione

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_4}.g(x_1, x_2, x_3) + x_4 .h(x_1, x_2, x_3)$$

si vede che per la funzione h si ha la matrice:

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ \hline 1 & 1 & \frac{1}{3} & \end{array}$$

e quindi tale funzione non e' totalmente simmetrica nelle variabili x_1, x_2, x_3.