MISURE DI RISCHIO

In ambito attuariale, rivestono notevole importanza le capacità di “confrontare”, di “misurare”, di valutare i rischi, ai fini di

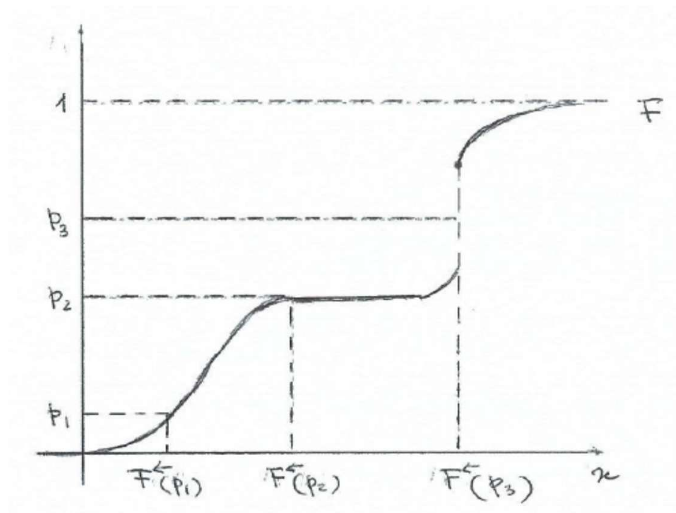
- determinare premi adeguati alle coperture fornite,
- individuare aree profittevoli nelle quali sviluppare l’attività,
- determinare adeguati capitali di rischio e margini per il rischio,
- conciliare le esigenze di
    - assicurati: interessati al fatto che l’impresa abbia solide e ampie disponibilità finanziarie, a garanzia degli impegni presi nei loro confronti,
    - azionisti: interessati ad ottenere adeguata redditività del capitale impiegato,
- scegliere adeguate coperture riassicurative.

Premesse. Considerata una funzione di ripartizione F, se F è strettamente crescente con insieme immagine l'intervallo $[0,1]$, allora esiste l'inversa F^{-1} definita su $[0,1]$. E' utile introdurre una nozione che generalizzi quella di funzione inversa, applicabile a tutte le funzioni di ripartizione.

Def. Data una funzione di ripartizione F, è detta **inversa generalizzata** o **funzione quantile** della F, la funzione così definita

$$F^{\leftarrow}(p) = inf\{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \geq p\}, \quad p \in [0,1],$$

con $inf\mathbb{R} = -\infty$, $inf\phi = +\infty$.



Fissato $p \in [0,1]$, poniamo $A_p = \{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \geq p\}$.

Osservazioni.

(1) **Sia $\boldsymbol{p = 0}$**, allora $A_0 = \{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \geq 0\} = \mathbb{R}$. Segue $F^{\leftarrow}(0) = inf\mathbb{R} = -\infty$.

Sia $\boldsymbol{p = 1}$, allora $A_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \geq 1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid F(x) = 1\}$.

- Se per ogni $x \in \mathbb{R}$, $F(x) < 1$ allora $A_1 = \phi$. Segue $F^{\leftarrow}(1) = inf\,\phi = +\infty$.
- Se esiste $x \in \mathbb{R}$ tale che $F(x) = 1$, allora $A_1 \neq \phi$. Proviamo che A_1 è inferiormente limitato: $\exists\, x' \in \mathbb{R} : x' \leq x \ \forall x \in A_1$.

  Si ha

  $$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall I_0 \ \exists\, I_{-\infty} \text{ tc } x \in I_{-\infty} \Rightarrow F(x) \in I_0$$

  Fissiamo un opportuno intorno di 0: $I_0 =]-\varepsilon, \varepsilon[$, con $\varepsilon < 1$. Allora, $\exists\, I_{-\infty}$ tc $x \in I_{-\infty} \Rightarrow F(x) \in I_0$.

  Sia $x' \in I_{-\infty} \Rightarrow F(x') \in I_0 \Rightarrow F(x') < 1 = F(x) \ \forall x \in A_1$. Dunque, $F(x') < F(x) \ \forall x \in A_1$.
  Essendo F monotona non decrescente, segue $x' < x \ \forall x \in A_1$.

  Allora, $A_1 \neq \phi$, A_1 inferiormente limitato. Segue $F^{\leftarrow}(1) = inf\,A_1 \in \mathbb{R}$.

Sia $\boldsymbol{p} \in]\mathbf{0}, \mathbf{1}[$. Proviamo che $A_p = \{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \geq p\}$ è non vuoto, inferiormente limitato.

Per provare che $A_p \neq \phi$, sfruttiamo

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \forall I_1 \; \exists \; I_{+\infty} \text{ tc } x \in I_{+\infty} \Rightarrow F(x) \in I_1$$

Fissiamo un opportuno intorno di 1: $I_1 =]1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon[$, con $1 - \varepsilon > p$. Allora, $\exists \; I_{+\infty}$ tc $x \in I_{+\infty}$ $\Rightarrow F(x) \in I_1$.

Sia $x' \in I_{+\infty} \Rightarrow F(x') \in I_1 \Rightarrow F(x') > p \Rightarrow x' \in A_p$. Segue $A_p \neq \phi$.

Per provare che A_p è inferiormente limitato, sfruttiamo $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$. Fissiamo un opportuno intorno di 0: $I_0 =]-\varepsilon, \varepsilon[$, con $\varepsilon < p$. Esiste $I_{-\infty}$ tc $x \in I_{-\infty} \Rightarrow F(x) \in I_0$.

Fissiamo $x' \in I_{-\infty} \Rightarrow F(x') < p \leq F(x) \; \forall x \in A_p$. Dunque, $F(x') < F(x) \; \forall x \in A_p$. Essendo F monotona non decrescente, segue $x' < x \; \forall x \in A_p$.

Allora, $A_p \neq \phi$, A_p inferiormente limitato. Segue $F^{\leftarrow}(p) = inf A_p \in \mathbb{R}$.

Pertanto,

$$F^{\leftarrow} : [0,1] \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

(2) Sia $A_p \neq \phi$, allora A_p è un intervallo superiormente illimitato.

Se $\boldsymbol{p = 0}$, $A_0 = \mathbb{R}$.

Se $\boldsymbol{p} \in \,]\mathbf{0}, \mathbf{1}[$ o $\boldsymbol{p = 1}$ e $\boldsymbol{A_1} \neq \phi$, allora $inf\, A_p = F^{\leftarrow}(p) \in \mathbb{R}$. Poniamo $\lambda = F^{\leftarrow}(p)$. Proviamo che

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ tc } x > \lambda \Rightarrow x \in A_p.$$

Fissiamo $x > \lambda$. Allora (proprietà dell'*inf*)

$$\exists\, x' < x \text{ tale che } x' \in A_p.$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$\underset{F \text{ è monotona non decrescente}}{F(x') \leq F(x)} \qquad F(x') \geq p \quad \Rightarrow \quad F(x) \geq p$$

Dunque $x \in A_p$.

Nota. Proveremo che anche $\lambda = F^{\leftarrow}(p) \in A_p$.

Dalla precedente proprietà, si ha che,

- se F è invertibile dove è diversa da 0 e 1, allora $F^{\leftarrow} = F^{-1}$, dove F^{-1} è definita,
- se F è continua in $\mathbb{R}$, strettamente crescente dove è diversa da 0 e 1, allora $F^{\leftarrow}(p) = F^{-1}(p)$, per ogni $p \in]0,1[$.

(4) Sia F costante a tratti, con punti di discontinuità $x_1 < x_2$ ... .

Si ha

$$]0,1[\subset]0, F(x_1)] \cup]F(x_1), F(x_2)] \cup \ldots \cup]F(x_{i-1}), F(x_i)] \cup \ldots$$

e gli intervalli a secondo membro sono a due a due disgiunti.

Sia $p \in]0,1[$, allora esiste unico i tale che $p \in]F(x_{i-1}), F(x_i)]$, ($F(x_0) = 0$). Segue che

$$A_p = \{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \geq p\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq x_i\},$$

e dunque

$$F^{\leftarrow}(p) = inf\, A_p = x_i.$$

Pertanto, per ogni $p \in]0,1[$,

$$F^{\leftarrow}(p) = x_i \quad \Leftrightarrow \quad F(x_{i-1}) < p \leq F(x_i).$$

Lemma. Sia $F^{\leftarrow}$ l'inversa generalizzata di una funzione di ripartizione F. Si ha

(i) $(i1)$ $F(F^{\leftarrow}(p)) \geq p$, $\forall\, p \in\,]0{,}1[$ e per $p = 1$ se $A_1 \neq \phi$,

$(i2)$ $F^{\leftarrow}(F(x)) \leq x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$,

(ii) $F^{\leftarrow}$ è monotona non decrescente,

(iii) $F(x) \geq p \quad \Leftrightarrow \quad x \geq F^{\leftarrow}(p)$, $\forall\, p \in [0{,}1]$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Dim.

$(i1)$ Sia $p \in\,]0{,}1[$ o $p = 1$ con $A_1 \neq \phi$. Allora, $F^{\leftarrow}(p) \in \mathbb{R}$. Poniamo $\lambda = F^{\leftarrow}(p)$. Per la continuità a destra della F, si ha

$$\lim_{x \to \lambda^+} F(x) = F(\lambda).$$

E' il limite della restrizione della F all'insieme $\{x \in \mathbb{R} \mid x > \lambda\}$. Per l'Osservazione (2), $x > \lambda \Rightarrow x \in A_p$. Pertanto, $F(x) \geq p$, per ogni x appartenente a tale insieme. Segue che $\lim_{x \to \lambda^+} F(x) \geq p$.

Pertanto,

$$F(\lambda) = F(F^{\leftarrow}(p)) \geq p.$$

In generale, non vale l'uguaglianza. Per $p = 1$ e $A_1 \neq \phi$, si ha $F\big(F^{\leftarrow}(1)\big) = 1$.

Si noti che, essendo $F(\lambda) \geq p$, si ha $\lambda = F^{\leftarrow}(p) = inf A_p \in A_p$. Pertanto, $F^{\leftarrow}(p) = min A_p$.

Teorema (*Probability integral transform*). Siano F una funzione di ripartizione e U un numero aleatorio con determinazioni in $]0,1[$ e con distribuzione uniforme ($U \sim Unif(0,1)$). Allora,

$$X' = F^{\leftarrow}(U)$$

ha funzione di ripartizione F.

Dim. Ricordiamo che $U \sim Unif(0,1)$, se $f_U(u) = 1, u \in]0,1[$, $F_U(u) = \begin{cases} 0 & u < 0 \\ u & 0 \leq u < 1 \\ 1 & u \geq 1 \end{cases}$

Fissato $x \in \mathbb{R}$, consideriamo

$$F_{X'}(x) = Pr(F^{\leftarrow}(U) \leq x) \underset{\uparrow}{=} Pr(U \leq F(x)) = F_U\big(F(x)\big) = F(x).$$

per Lemma (iii), $F(x) \geq u \Leftrightarrow x \geq F^{\leftarrow}(u)$, per ogni $u \in]0,1[$

Il prossimo teorema fornisce una rappresentazione della speranza matematica per numeri aleatori non negativi.

Teorema. Sia $X \geq 0$, con funzione di ripartizione F_X e speranza matematica $E(X)$ finita. Riesce

$$E(X) = \int_0^{+\infty} x dF_X(x) = \int_0^{+\infty} \big(1 - F_X(x)\big) dx = \int_0^{+\infty} \bar{F}_X(x) dx,$$

dove $\bar{F}_X(x) = 1 - F_X(x)$ è la funzione delle code della F_X.

Dim. Esiste finito

$$\lim_{c \to +\infty} \int_0^c x dF_X(x) = E(X).$$

Per un fissato $c > 0$, integrando per parti, $\int_a^b f(x) dF(x) = f(x)F(x)|_a^b - \int_a^b f'(x)F(x)dx$, si ha

$$\begin{aligned} \int_0^c x dF_X(x) &= xF_X(x)|_0^c - \int_0^c F_X(x) dx \\ &= cF_X(c) - \int_0^c F_X(x) dx \\ &= -c\big(1 - F_X(c)\big) + \int_0^c (1 - F_X(x)) dx. \end{aligned}$$

Pertanto,

$$\int_0^c (1 - F_X(x))dx = c\big(1 - F_X(c)\big) + \int_0^c x dF_X(x). \text{ (**)}$$

Consideriamo il termine

$$c\big(1 - F_X(c)\big) = c\int_c^{+\infty} dF_X(x) = \int_c^{+\infty} c dF_X(x) \leq \int_c^{+\infty} x dF_X(x) = \int_0^{+\infty} x dF_X(x) - \int_0^c x dF_X(x).$$

Essendo,

$$\begin{array}{lcl} 0 \leq c\big(1 - F_X(c)\big) \leq & \int_0^{+\infty} x dF_X(x) - \int_0^c x dF_X(x) \, , & \\ \downarrow & \downarrow & c \to +\infty \\ 0 & 0 & \end{array}$$

per il Teorema del confronto tra i limiti segue

$$\lim_{c \to +\infty} c\big(1 - F_X(c)\big) = 0.$$

Allora, per $c \to +\infty$, esiste finito il limite del secondo membro della (**) ed è $E(X)$, segue che esiste finito anche il limite del primo membro ed è

$$\lim_{c \to +\infty} \int_0^c (1 - F_X(x))dx = \int_0^{+\infty} (1 - F_X(x))dx = E(X). \qquad \blacksquare$$

Parliamo di **misure di rischio** per posizioni finanziarie che siano **rischi puri**. Riferimento bibliografico Denuit et al. (2005).

Diciamo **rischio** un numero aleatorio non negativo, $X \geq 0$, che rappresenti l'importo che un assicuratore dovrà pagare ad un beneficiario per risarcire un sinistro o i sinistri che colpiscono un contratto o un portafoglio di contratti in un fissato intervallo di tempo.

Si vuole valutare la rischiosità connessa a una tale posizione finanziaria. Si introducono **indicatori di rischiosità**: dato un rischio X, si associa un numero reale $\rho(X) \geq 0$ che quantifichi la rischiosità. Intuitivamente, un valore elevato di $\rho(X)$ indica che X è "pericoloso".

Uno **schema interpretativo** per associare ad un rischio X una misura di rischiosità può essere quello di determinare il più piccolo ammontare di capitale di cui colui che detiene o deve acquisire il rischio deve disporre per rendere la posizione (di dovere pagare X, di subire il flusso $-X$) "accettabile" per il detentore o per un'autorità di controllo esterna.

Diamo la seguente definizione informale.

Dato un insieme di rischi $\mathcal{X}$, una **misura di rischio** su $\mathcal{X}$ è un funzionale,

$$\rho: \mathcal{X} \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\},$$

dove, dato $X \in \mathcal{X}$, $\rho(X)$ rappresenta il minimo ammontare di capitale del quale il detentore della posizione rischiosa deve disporre per rendere accettabile la posizione (di dovere pagare l'importo X) per un'autorità di controllo (interna o esterna).

E' dunque accettabile dovere pagare X (il flusso $-X$) se si dispone del capitale $\rho(X)$: la posizione con flusso $-X + \rho(X)$ è accettabile.

Se $\rho(X) = 0$, dovere pagare X è accettabile.

Nota. Dato un insieme di rischi $\mathcal{X}$ si potrebbe introdurre un **insieme di accettabilità** $\boldsymbol{\mathcal{A}}$, di posizioni accettabili, e definire

$$\rho_{\mathcal{A}}(X) = inf\{\alpha \geq 0 \mid -X + \alpha \in \mathcal{A}\}.$$

Si ha che se $X \in \mathcal{X}$ è tale che $-X \in \mathcal{A}$, allora $\rho_{\mathcal{A}}(X) = 0$.

Osservazioni.

- Se X rappresenta il risarcimento per un portafoglio assicurativo, in un fissato periodo di tempo, per la gestione del portafoglio l'assicuratore deve disporre di un adeguato ammontare capitale (richiesto da un'autorità di controllo interna o esterna) a fronte del rischio di insolvenza (**capitale di rischio** o **capitale di solvibilità**). Le misure di rischio sono dunque gli strumenti per determinare requisiti di capitale.

- Ogni **principio di calcolo del premio** può essere visto come una particolare misura di rischio secondo la nozione data. Infatti, ricordiamo che un principio di calcolo del premio Π è un funzionale definito su un insieme $\mathcal{X}$ di rischi, che rappresentano risarcimenti totali per contratti assicurativi, che associa a $X \in \mathcal{X}$, $\Pi(X)$ il premio puro ovvero l'importo che l'assicuratore richiede perché sia, per lui, accettabile stipulare il contratto. Viceversa, ogni misura di rischio su $\mathcal{X}$, tale che $\rho(X) > E(X)$, per ogni $X \in \mathcal{X}$, può essere vista come un principio di calcolo del premio.

Diverse delle proprietà incontrate nello studio dei principi di calcolo del premio sono considerate anche nell'ambito delle misure di rischio.

Una misura di rischio può dipendere dal rischio solo tramite la distribuzione di probabilità, in tale caso si ha

$$X =^d Y \Rightarrow \rho(X) = \rho(Y).$$

Presentiamo alcune classi di misure di rischio.

MISURE COERENTI DI RISCHIO

Def. Una misura di rischio ρ su $\mathcal{X}$ è detta **misura coerente di rischio** (Artzner et al. 1999) se

1) $\rho(X + c) = \rho(X) + c$, per ogni $X \in \mathcal{X}$ e per ogni c, certo, tale che $X + c \in \mathcal{X}$ (*traslatività*)

2) $\rho(aX) = a\rho(X)$, per ogni $X \in \mathcal{X}$ e per ogni $a > 0$, certo, tale che $aX \in \mathcal{X}$ (*positiva omogeneità*)

3) $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$, per ogni $X, Y \in \mathcal{X}$ tale che $X + Y \in \mathcal{X}$ (*sub-additività*)

4) $X \leq Y \Rightarrow \rho(X) \leq \rho(Y)$, per ogni $X, Y \in \mathcal{X}$ (*monotonia*)

Notiamo che si tratta di proprietà che abbiamo già commentato in relazione ai principi di calcolo dei premi. Le commentiamo in termini di dotazione di capitale.

1) La proprietà di traslatività, $\rho(X+c)=\rho(X)+c$, richiede che se il rischio X è incrementato o ridotto di un importo certo, allora anche il capitale deve essere incrementato o ridotto dello stesso importo.

E' importante anche per potere interpretare la misura di rischio come dotazione di capitale che rende accettabile una posizione rischiosa. Infatti, se per rendere accettabile X, ovvero il flusso $-X$, si richiede di avere un capitale $\rho(X)$, allora il flusso

$$-X+\rho(X)=-(X-\rho(X)) \text{ è accettabile,}$$

dunque è accettabile dovere pagare $X-\rho(X)$ e non è necessaria un'allocazione di capitale. Deve allora risultare

$$\rho\big(X-\rho(X)\big)=0.$$

Se vale la proprietà di traslatività la condizione è soddisfatta, poiché si ha

$$\rho\big(X-\rho(X)\big)=\rho(X)-\rho(X)=0.$$

2) La proprietà di omogeneità, $\rho(aX) = a\rho(X), a > 0$, è spesso associata all'indipendenza rispetto all'unità monetaria utilizzata:

$$\begin{array}{ll} X \textit{ valuta1} & \rho(X) \textit{ valuta1} \\ \updownarrow & \updownarrow \\ aX \textit{ valuta2} & a\rho(X) \textit{ valuta2} \end{array}$$

Da altri punti di vista può essere criticata. Ad esempio, se a è elevato si può ritenere che il capitale per rendere accettabile dovere pagare aX debba essere maggiore di $a\rho(X)$, per penalizzare una maggiore concentrazione di rischio e conseguenti possibili problemi di liquidità. Si noti che se $a > 1$, $var(aX) = a^2 var(X) > a\ var(X)$.

3) La proprietà di sub-additività, $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$, riflette l'idea che i rischi possono essere ridotti mediante diversificazione.

Inoltre, se un'autorità di controllo utilizza una misura di rischio non sub-addittiva per determinare il capitale di solvibilità per una compagnia di assicurazioni, e per una coppia di rischi X, Y si ha $\rho(X + Y) > \rho(X) + \rho(Y)$, allora la compagnia avrebbe interesse a ripartire l'attività tra società controllate al fine di ridurre il requisito di capitale.

La sub-additività potrebbe però non essere auspicabile nel caso in cui non ci sia un effetto di diversificazione tra i rischi.

4) La proprietà di monotonia, $X \leq Y \Rightarrow \rho(X) \leq \rho(Y)$, è piuttosto naturale: se un rischio comporta, certamente, un pagamento inferiore di un altro è ragionevole che il capitale di copertura debba essere maggiore per il secondo rischio.

Notiamo che la coerenza è definita rispetto ad un insieme di assiomi, non significa che misure che soddisfino altri sistemi di assiomi siano "incoerenti".

Si noti che se poniamo $\rho(X) = E(X)$, otteniamo una misura coerente di rischio secondo la definizione, ma tale misura non è adeguata, ad esempio, per il calcolo dei premi.

MISURA DI RISCHIO DEL VALUE-AT-RISK (VaR)

Def. Dato un rischio $X \geq 0$, con funzione di ripartizione F_X, e un valore di probabilità $p \in]0,1[$ è detto **Value-at-Risk di $\boldsymbol{X}$ al livello $\boldsymbol{p}$**, indicato con $VaR[X;p]$,

$$VaR[X;p] = F_X^{\leftarrow}(p) = inf\{x \in \mathbb{R} \mid F_X(x) \geq p\} = min\{x \in \mathbb{R} \mid F_X(x) \geq p\}.$$

Def. Dato un insieme di rischi $\mathcal{X}$ e fissato un valore di probabilità $p \in]0,1[$ è detto **misura di rischio del Value-at-Risk al livello $\boldsymbol{p}$**, il funzionale

$$\begin{aligned} \rho_p(\cdot) = Var[\cdot;p] : \mathcal{X} &\to \mathbb{R}_+ \\ X &\to VaR[X;p] \end{aligned}$$

Osservazioni.

- I quantili sono misure di rischio piuttosto naturali per determinare allocazioni di capitale per posizioni rischiose. Si ha

$$Pr(X > VaR[X;p]) = 1 - Pr(X \leq VaR[X;p]) = 1 - \underbrace{F_X\left(F_X^{\leftarrow}(p)\right) \leq 1 - p}_{\uparrow \text{ Lemma } (i1)}$$

  e dunque

$$Pr(-X + VaR[X;p] < 0) \leq 1 - p.$$

  Allora, se p è “grande”, la probabilità incorrere in una perdita è “piccola”.

- E’ una misura di rischio che è stata adottata per determinare i requisiti di solvibilità delle istituzioni finanziarie (Basilea II) e delle imprese assicuratrici (Solvency II).

- Il VaR esiste sempre ed è espresso nella stessa unità monetaria del rischio: ha dimensione di un importo.

- E’ una misura di rischio che dipende dalla distribuzione di probabilità:

$$X =^d Y \Rightarrow VaR[X;p] = VaR[Y;p].$$

Proprietà. Dato un insieme di rischi $\mathcal{X}$ e fissato un valore di probabilità $p \in]0{,}1[$,

$$VaR[\cdot;p] : \mathcal{X} \to \mathbb{R}_+,$$

soddisfa le seguenti proprietà.

a) *Proprietà no-ripoff*: se esiste $M \in \mathbb{R}$, certo, tale che $X \leq M$, allora $VaR[X;p] \leq M$.

Infatti, $X \leq M \;\Rightarrow\; F_X(M) = 1 > p$. Per Lemma (iii), $F_X(M) > p \;\Rightarrow\; M \geq F_X^{\leftarrow}(p) = VaR[X;p]$.

E' una proprietà auspicabile: non è necessario detenere un capitale maggiore del massimo valore da pagare.

b) *Proprietà di traslatività*: $VaR[X+c;p] = VaR[X;p] + c$, se c è certo.

Proviamo che

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad VaR[X+c;p] \le x \;\Leftrightarrow\; VaR[X;p] + c \le x.$$

Fissato $x \in \mathbb{R}$, si ha

$$VaR[X+c;p] \le x \quad \Leftrightarrow \quad F_{X+c}^{\leftarrow}(p) \le x \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Lemma } (iii) \text{ alla } F_{X+c}^{\leftarrow}}}{\Leftrightarrow} \quad p \le F_{X+c}(x) \quad \underset{\substack{\uparrow \\ F_{X+c}(x) = F_X(x-c)}}{\Leftrightarrow} \quad p \le F_X(x-c)$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Lemma } (iii) \text{ alla } F_X^{\leftarrow}}}{\Leftrightarrow} \quad F_X^{\leftarrow}(p) \le x - c \quad \Leftrightarrow \quad F_X^{\leftarrow}(p) + c \le x \quad \Leftrightarrow \quad VaR[X;p] + c \le x$$

Per l'arbitrarietà di x, segue la tesi.

c) *La proprietà di positiva omogeneità*: $VaR[aX;p] = aVaR[X;p]$, se $a > 0$ è certo.

Analogamente alla proprietà precedente, si prova che

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad VaR[aX;p] \le x \;\Leftrightarrow\; aVaR[X;p] \le x.$$

d) *La proprietà di monotonia*: $X \leq Y \Rightarrow VaR[X;p] \leq VaR[Y;p]$.

Proviamo dapprima che

$$X \leq Y \quad \Rightarrow \quad F_X(x) \geq F_Y(x), \;\; \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Fissato $x \in \mathbb{R}$, essendo $X \leq Y$, si ha che $Y \leq x \rightarrow X \leq x$. Allora $Pr(Y \leq x) \leq Pr(X \leq x)$ ovvero $F_Y(x) \leq F_X(x)$.

Consideriamo ora i due insiemi

$$A_p^{(X)} = \{x \in \mathbb{R} \mid F_X(x) \geq p\} \qquad\qquad A_p^{(Y)} = \{x \in \mathbb{R} \mid F_Y(x) \geq p\}$$

Sono non vuoti, inferiormente limitati, perché $p \in]0,1[$.

Riesce $A_p^{(Y)} \subset A_p^{(X)}$: se x è tale che $F_Y(x) \geq p$, essendo $F_X(x) \geq F_Y(x)$, segue che $F_X(x) \geq p$.

Allora,

$$inf\, A_p^{(Y)} \;\geq\; inf\, A_p^{(X)} \Leftrightarrow VaR[Y;p] \geq VaR[X;p].$$

e) *Non introduce "caricamenti ingiustificati":* se X è certo o quasi certo, $X = \bar{x}$ o $Pr(X = \bar{x}) = 1$, con $\bar{x}$ numero certo, allora $VaR[X;p] = \bar{x}$.

Segue da $$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < \bar{x} \\ 1 & x \geq \bar{x} \end{cases}$$ ■

Ci sono due importanti proprietà non soddisfatte dal VaR.

Si dice che una misura di rischio ρ *introduce un caricamento di sicurezza*, se per ogni rischio X riesce $\rho(X) > E(X)$.

La misura di rischio del VaR non soddisfa tale proprietà.

Controesempio. Fissato $p \in]0,1[$, consideriamo un rischio X tale che $E(X) < +\infty$ e $F_X\big(E(X)\big) = p^* \in]0,1[$.

Se $p < p^*$, allora

$$VaR[X;p] = F_X^{\leftarrow}(p) \underset{\text{Lemma }(ii)}{\leq} F_X^{\leftarrow}(p^*) = F_X^{\leftarrow}\Big(F_X\big(E(X)\big)\Big) \underset{\text{Lemma }(i2)}{\leq} E(X)$$

Notiamo che la misura di rischio del VaR, come principio di calcolo del premio è il principio del percentile: fissato $0 < \varepsilon < 1$ (ε "piccolo"),

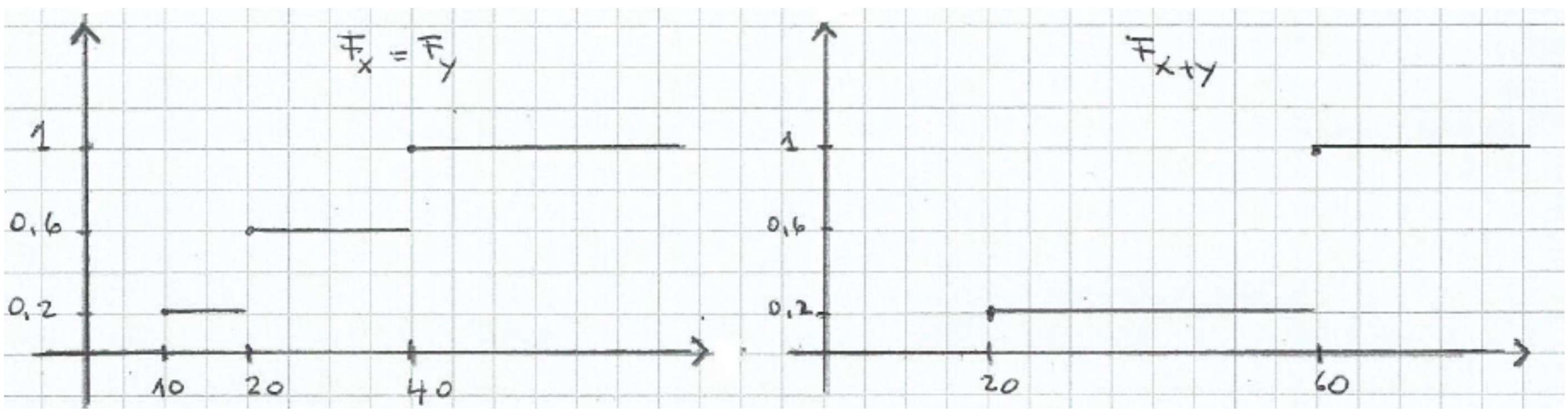
$$\Pi(X) = inf\{P \mid F_X(P) \geq 1 - \varepsilon\} = F_X^{\leftarrow}(1-\varepsilon) = VaR[X; 1-\varepsilon].$$

La misura di rischio del VaR non soddisfa la proprietà di sub-additività.

Controesempio. Siano $\mathbb{P} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ una partizione dell'evento certo e X, Y due numeri aleatori definiti su $\mathbb{P}$, tali che

$\mathbb{P}$	$Pr(\cdot)$	X	Y	$X + Y$
ω_1	0.2	10	10	20
ω_2	0.4	20	40	60
ω_3	0.4	40	20	60

Riesce



Per $p = 0.6$, si ha $VaR[X; p] = VaR[Y; p] = 20$, $VaR[X + Y; p] = 60$. Pertanto,

$$VaR[X + Y; p] > VaR[X; p] + VaR[Y; p]. \qquad \blacksquare$$

Osservazione. Nel provare la monotonia, abbiamo provato che fissato, arbitrariamente, $p \in]0,1[$, si ha

$$F_X(x) \geq F_Y(x), \forall\, x \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; VaR[X;p] \leq VaR[Y;p].$$

Allora,

$$F_X(x) \geq F_Y(x), \forall\, x \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; F_X^{\leftarrow}(p) \leq F_Y^{\leftarrow}(p), \quad \forall\, p \in]0,1[.$$

La proprietà vale anche per $p = 0, p = 1$:

- se $p = 0$ o $p = 1$ e $A_1^{(Y)} = \phi$, banale,
- se $p = 1$ e $A_1^{(X)} \neq \phi$ e $A_1^{(Y)} \neq \phi$, allora, in modo analogo a quanto visto per $p \in]0,1[$, $F_X^{\leftarrow}(1) \leq F_Y^{\leftarrow}(1)$.

Si noti che non è possibile che $A_1^{(X)} = \phi$ e $A_1^{(Y)} \neq \phi$.

Pertanto, si ha

$$F_X(x) \geq F_Y(x), \forall\, x \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; F_X^{\leftarrow}(p) \leq F_Y^{\leftarrow}(p), \quad \forall\, p \in [0,1].$$

Proviamo che vale anche il viceversa:

$$F_X^{\leftarrow}(p) \le F_Y^{\leftarrow}(p), \quad \forall\, p \in [0,1] \quad \Rightarrow \quad F_X(x) \ge F_Y(x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Fissato $x \in \mathbb{R}$, poniamo $p = F_Y(x)$. Per ipotesi, si ha $F_X^{\leftarrow}(p) \le F_Y^{\leftarrow}(p)$. Allora,

$$F_X^{\leftarrow}\big(F_Y(x)\big) \le \underset{\uparrow \text{ per Lemma } (i2)}{F_Y^{\leftarrow}(F_Y(x)) \le x} \quad \Rightarrow \quad F_X^{\leftarrow}\big(F_Y(x)\big) \le x$$

Per Lemma (iii), applicato alla $F_X^{\leftarrow}$,

$$F_X^{\leftarrow}\big(F_Y(x)\big) \le x \quad \Leftrightarrow \quad F_Y(x) \le F_X(x).$$

In conclusione, si ha

$$F_X(x) \geq F_Y(x), \ \forall\, x \in \mathbb{R} \ \Leftrightarrow \ F_X^{\leftarrow}(p) \leq F_Y^{\leftarrow}(p), \ \ \forall\, p \in [0,1].$$

Notiamo che

$$F_X(x) \geq F_Y(x) \ \Leftrightarrow \ 1 - F_X(x) \leq 1 - F_Y(x) \ \Leftrightarrow \ Pr(X > x) \leq Pr(Y > x), \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Y è “più rischioso” di X

La precedente relazione è detta **dominanza stocastica del I ordine**.

Dalla proprietà vista, se Y è “più rischioso” di X ogni quantile della distribuzione di Y è maggiore o uguale del corrispondente quantile della distribuzione di X, e viceversa. ■

Capitale di rischio basato sul VaR

I premi pagati dagli assicurati potrebbero rivelarsi insufficienti a coprire i risarcimenti per i sinistri che colpiscono il portafoglio. L'assicuratore deve realizzare un sistema di *risk management* per fronteggiare tale rischio.

Diversi aspetti dei quali abbiamo parlato possono essere visti come azioni di controllo e gestione del rischio da parte di un assicuratore: la tariffazione, la valutazione di adeguati caricamenti di sicurezza, la valutazione di adeguate riserve tecniche, la riassicurazione o altre forme di trasferimento del rischio.

Un'ulteriore azione della quale un assicuratore dispone, ai fini della **solvibilità**, è **l'allocazione di capitale** (capitale dei soci) al portafoglio.

Che cosa si deve intendere per “solvibilità”

Riprendiamo da Matematica attuariale un semplice modello.

Con riferimento ad un fissato portafoglio in un fissato intervallo di tempo, diciamo un anno, siano:

- X il risarcimento totale che l’assicuratore deve pagare,
- $P = E(X) + m$ i premi netti incassati, dati dai premi equi $E(X)$ e dai caricamenti di sicurezza m,
- R l’importo di capitale allocato al portafoglio.

Non teniamo conto delle spese e di aspetti finanziari.

Diciamo **evento** “**rovina”** (condizione di insolvenza), l’evento definito da

$$X > R + P,$$

i premi e il capitale allocato non sono sufficienti per coprire il risarcimento totale.

Si tratta naturalmente di un evento possibile, la “rovina” è un rischio ineliminabile. In ambito assicurativo, la **solvibilità** non può essere intesa in **senso assoluto** come la capacità di pagare l’intero ammontare dovuto: l’assicuratore dovrebbe avere premi e detenere fondi propri per pagare il massimo valore del risarcimento per rischio, per tutti i rischi del portafoglio.

La **solvibilità** deve essere intesa **in senso probabilistico**. Un **requisito di solvibilità** può essere espresso da una condizione del tipo

$$Pr(X > R + P) \leq 1 - p,$$

dove $1 - p$ è un valore di probabilità assegnato, “piccolo” (ad es. 0.5%, $1 - p =$ 0.005): la probabilità di rovina deve essere inferiore rispetto ad un fissato livello ritenuto “accettabile”.

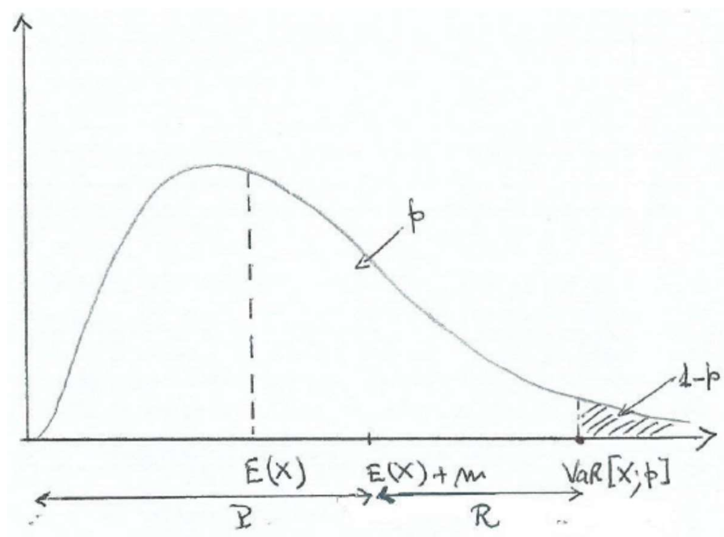
Riesce

$$Pr(X > R + P) \leq 1 - p \quad \Leftrightarrow \quad 1 - F_X(R + P) \leq 1 - p \quad \Leftrightarrow \quad F_X(R + P) \geq p.$$

Allora, se

$$R + P = min\{x \in \mathbb{R} \,|F_X(x) \geq p\} = VaR[X; p],$$

- il requisito di solvibilità è soddisfatto,
- $VaR[X; p]$ è il minimo valore di $R + P$ che consente di rendere soddisfatto il requisito.



Se sono dati la distribuzione di X e $P = E(X) + m$, l'equazione

$$R + P = VaR[X; p],$$

può essere risolta rispetto a R. La soluzione

$$R = VaR[X; p] - P,$$

è detta **capitale di rischio basato sul VaR**, al livello p.

Ossevazioni.

- La

$$R + P = VaR[X; p] \quad \Leftrightarrow \quad R + E(X) + m = VaR[X; p],$$

  può essere vista come equazione in R e m. Per rendere soddisfatto il requisito di solvibilità si può allora agire su R e m:

  - agire su m, ma tale azione è limitata da condizioni di mercato;
  - agire su R, ma tale azione comporta un costo per gli azionisti;

  Un'altra possibilità è ricorrere alla riassicurazione.

- Effetto della riassicurazione sul requisito di solvibilità.

  Siano dati X, P. Il capitale di rischio basato sul VaR al livello p è dunque $R = VaR[X;p] - P$.

  Consideriamo una copertura riassicurativa per il portafoglio e indichiamo con Γ la parte conservata dalla cedente, $\Gamma \leq X$, e con P_r il premio pagato al riassicuratore.

  Il capitale di rischio R' basato sul VaR al livello p per il portafoglio coperto è ottenuta dalla

$$R' + P - P_r = VaR[\Gamma;p] \leq VaR[X;p].$$

↑ monotonia del VaR

  Si deve però tenere conto che $P - P_r < P$.

  Esempio. Riassicurazione Quota-Share: $\Gamma = aX, \;\; 0 < a < 1.$

  Si ha $$VaR[\Gamma;p] = VaR[aX;p] = aVaR[X;p]\,.$$

↑ positiva omogeneità del VaR

  Sia $P_r = (1-a)P$. Allora,

$$R' + aP = aVaR[X;p] \;\;\Leftrightarrow\;\; R' = a(VaR[X;p] - P) < VaR[X;p] - P = R.$$

  A maggiore ragione $R' < R$, se $P_r < (1-a)P$.

- Il capitale di rischio basato sul VaR può essere usato per valutare una passività, introducendo un **margine per il rischio**. Ad esempio, per valutare la riserva sinistri.

  Sia X l'importo aleatorio che un assicuratore dovrà pagare in futuro per risarcire sinistri che si sono già verificati.

  Per valutare la passività, le nuove normative, richiedono di valutare una "*best estimate*", intesa come il valore atteso $E(X)$ della passività, e di aggiungere un margine per il rischio, detto ***market value margin*** in Solvency II, ***risk adjustment*** in IFRS 17.

  Per il calcolo di tale margine si può seguire un approccio del tipo capitale di rischio basato sul VaR e porlo pari a

  $$MR = VaR[X;p] - E(X)$$

  Con p opportuno, ad esempio $p = 0.75$.

  Allora, la "riserva" è data da $E(X) + MR = E(X) + \big(VaR[X;p] - E(X)\big) = VaR[X;p]$, riesce

  $$Pr(X > E(X) + MR) \leq 1 - p,$$

  $E(X) + MR$ è il minimo importo che consente di limitare al livello $1 - p$ la probabilità che il risarcimento superi la "riserva" accantonata.

Osservazione. Notiamo che il requisito di capitale a fronte di una posizione rischiosa basato sul VaR consente di controllare il rischio di insolvenza, ma non di controllare l'entità della perdita in caso di insolvenza.

Esempio. Siano $\mathbb{P} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ una partizione dell'evento certo e X, Y due numeri aleatori definiti su $\mathbb{P}$, tali che

$\mathbb{P}$	$Pr(\cdot)$	X	Y
ω_1	0.2	10	10
ω_2	0.6	100	100
ω_3	0.2	200	1000

Per $p = 0.75$, si ha $VaR[X; p] = VaR[Y; p] = 100$. Benché i due numeri aleatori abbiano la stessa rischiosità in termini di VaR, Y può essere considerato più rischioso di X perché presenta un importo di pagamento sulla coda più elevato.

MISURE DI RISCHIO BASATE SUL VaR

Conditional Tail Expectation

$$CTE[X; p] = E(X|X > VaR[X; p]),$$

il rischio (l'importo da pagare) atteso condizionatamente all'ipotesi che esso superi il VaR.

Mean-excess

$$e_X(VaR[X; p]) = E(X - VaR[X; p]|X > VaR[X; p]),$$

il valore atteso dell'eccedenza rispetto al VaR, condizionatamente all'ipotesi che il rischio superi il VaR.

La funzione $e_X(v) = E(X - v|X > v)$ è detta **mean-excess function** o **vita media residua**.

Expected Shortfall

$$ES[X;p] = E[(X - VaR[X;p])_+],$$

dove $(x - v)_+ = max(0, x - v) = \begin{cases} 0 & x - v \leq 0 \Leftrightarrow x \leq v \\ x - v & x - v > 0 \Leftrightarrow x > v \end{cases}$

$ES[X;p]$ è anche detto **stop-loss premium**.

Infatti, in una riassicurazione stop-loss con priorità L per un portafoglio con risarcimento totale X, si ha $\Gamma = min(X, L)$, la parte conservata, $X_R = max(0, X - L) = (X - L)_+$, la parte ceduta, e $E(X_R) = E[(X - L)_+]$ il premio equo.

Tail-Value-at-Risk (TVaR)

$$TVaR[X;p] = \frac{1}{1-p}\int_p^1 VaR[X;u]du,$$

la media integrale dei valori del VaR sull'intervallo $[p, 1]$.

Nella letteratura la terminologia non è univoca.

Alcune relazioni tra i precedenti indicatori di rischiosità.

Per brevità di scrittura, nei passaggi poniamo $V = VaR[X;p]$.

- $ES[X;p] = E[(X - VaR[X;p])_+] = Pr(X > VaR[X;p])e_X(VaR[X;p])$

$$ES[X;p] = E[(X-V)_+] = Pr(X \le V)\underbrace{E[(X-V)_+|X \le V]}_{0} + Pr(X > V)\underbrace{E[(X-V)_+|X > V]}_{E[(X-V)|X>V]}$$

$$= Pr(X > V)E[X - V|X > V]$$

$$= Pr(X > V)e_X(V)$$

- $e_X(VaR[X;p]) = E(X - VaR[X;p]|X > VaR[X;p]) = \frac{ES[X;p]}{1-F_X(VaR[X;p])} = \frac{ES[X;p]}{\bar{F}_X(VaR[X;p])}$

- $CTE[X;p] = E(X|X > VaR[X;p]) = VaR[X;p] + \frac{ES[X;p]}{\bar{F}_X(VaR[X;p])}$

$$CTE[X;p] = E(X|X > V) = E(X - V|X > V) + V = V + e_X(V)$$

- $TVaR[X;p] = \frac{1}{1-p}\int_p^1 VaR[X;u]du = VaR[X;p] + \frac{ES[X;p]}{1-p}$

  Ricordiamo che se $U \sim Unif(0,1)$, allora $X =^d F_X^{\leftarrow}(U)$.

  Pertanto,

  $ES[X;p] = E[(X-V)_+] = E[(F_X^{\leftarrow}(U) - V)_+] = \int_0^1 (F_X^{\leftarrow}(u) - V)_+ du = \int_0^1 (F_X^{\leftarrow}(u) - F_X^{\leftarrow}(p))_+ du.$

  Poiché $F_X^{\leftarrow}$ è monotona non decrescente,

  $u \le p \Rightarrow F_X^{\leftarrow}(u) \le F_X^{\leftarrow}(p) \Rightarrow \ (F_X^{\leftarrow}(u) - F_X^{\leftarrow}(p))_+ = 0$

  $u > p \Rightarrow F_X^{\leftarrow}(u) \ge F_X^{\leftarrow}(p) \Rightarrow \ (F_X^{\leftarrow}(u) - F_X^{\leftarrow}(p))_+ = F_X^{\leftarrow}(u) - F_X^{\leftarrow}(p).$

  Segue,

$$\begin{aligned} ES[X;p] &= \int_0^1 (F_X^{\leftarrow}(u) - F_X^{\leftarrow}(p))_+ du = \int_p^1 (F_X^{\leftarrow}(u) - F_X^{\leftarrow}(p)) du \\ &= \int_p^1 F_X^{\leftarrow}(u) du - F_X^{\leftarrow}(p)(1-p) \\ &= \int_p^1 VaR[X;u]du - VaR[X;p](1-p) \end{aligned}$$

  Pertanto,

$$\frac{1}{1-p}\int_p^1 VaR[X;u]du = VaR[X;p] + \frac{ES[X;p]}{1-p}.$$

Notiamo che c'è una relazione tra

$$CTE[X;p] = E(X|X > VaR[X;p])$$
$$= VaR[X;p] + \frac{ES[X;p]}{\bar{F}_X(VaR[X;p])}$$

$$TVaR[X;p] = VaR[X;p] + \frac{ES[X;p]}{1-p}$$

Essendo, in generale,

$$\bar{F}_X(VaR[X;p]) = 1 - F_X(VaR[X;p]) = 1 - F_X\big(F_X^{\leftarrow}(p)\big) \leq 1 - p,$$

↑ Lemma($i1$)

si ha

$$CTE[X;p] \geq TVaR[X;p].$$

Se però F_X è continua in $\lambda = F_X^{\leftarrow}(p)$, allora $F_X\big(F_X^{\leftarrow}(p)\big) = p$ (*). In tale caso, si ha

$$CTE[X;p] = TVaR[X;p].$$

(*) Lemma $(i1)$ integrazione: Se F_X è continua in $\lambda = F_X^{\leftarrow}(p) \in \mathbb{R}$, allora $F_X\big(F_X^{\leftarrow}(p)\big) = F_X(\lambda) = p$.

Se, per assurdo, $F_X(\lambda) > p$, allora, per la continuità di F_X in λ, preso un intorno di $F_X(\lambda)$ del tipo $I_{F_X(\lambda)} =]F_X(\lambda) - \varepsilon, F_X(\lambda) + \varepsilon[$, con $F_X(\lambda) - \varepsilon > p$, esiste I_λ tale che per ogni $x \in I_\lambda$, $F_X(x) \in I_{F_X(\lambda)}$. Sia $x' \in I_\lambda$ e $x' < \lambda \Rightarrow F_X(x') \in I_{F_X(\lambda)} \Rightarrow F_X(x') > p \Rightarrow x' \in A_p \Rightarrow x' \geq inf A_p = \lambda$: assurdo.

Se F_X è continua $CTE[X;p] = TVaR[X;p]$, per ogni $p \in]0,1[$.

Proprietà (enunciato). Dato un insieme di rischi $\mathcal{X}$ e fissato un valore di probabilità $p \in]0,1[$, la misura di rischio $TVaR[\cdot;p]$ su $\mathcal{X}$ soddisfa le seguenti proprietà:

- è misura coerente di rischio,
- *no-ripoff*,
- non introduce caricamenti ingiustificati,
- introduce un caricamento di sicurezza.

Osserviamo che $TVaR[\cdot;p]$ è sub-additiva, mentre ciò non accade per $CTE[\cdot;p]$.

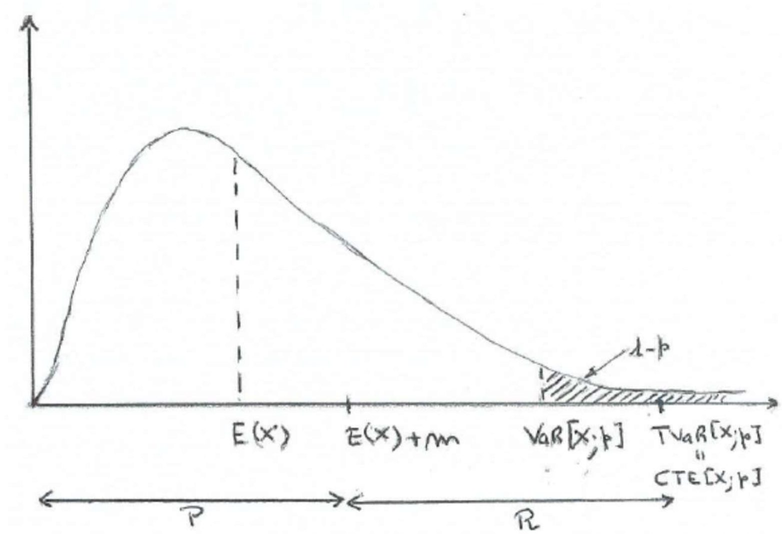
Capitale di rischio basato sul TVaR

Riprendiamo il modello considerato nel caso del capitale di rischio basato sul VaR con il **requisito di solvibilità**

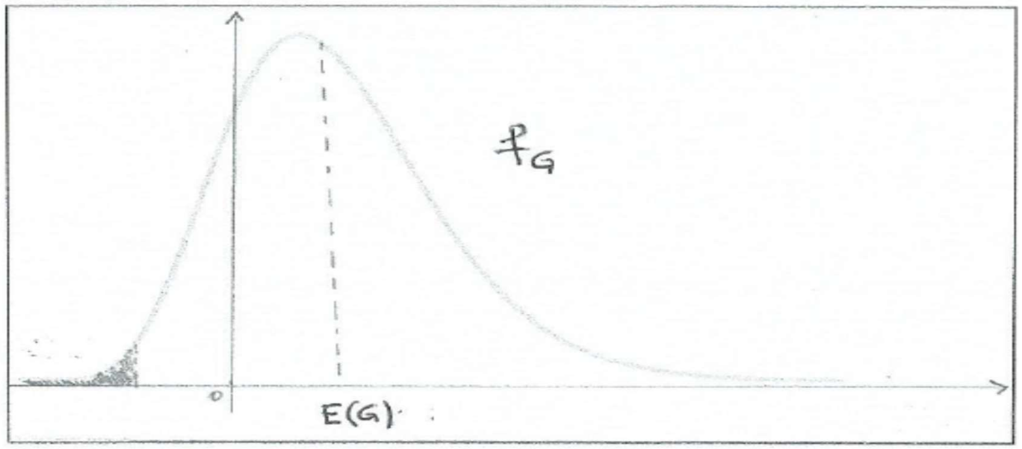
$$\Pr(X > R + P) \leq 1 - p \quad \Leftrightarrow \quad R + P \geq VaR[X; p].$$

Il capitale di rischio basato sul TVaR al livello p è definito dalla

$$R + P = TVaR[X; p] \quad \Leftrightarrow \quad R = TVaR[X; p] - P.$$



Osservazione. Sia G il "guadagno" aleatorio: saldo tra entrate e uscite in un fissato intervallo di tempo (es. un anno), in relazione ad un portafoglio. Gli eventi $G > 0, G = 0, G < 0$ sono possibili (profit/loss, rischio speculativo).



I problemi nascono se

(I) $G < 0$ perdita,

(II) $G < E(G)$ guadagno inferiore al valore atteso.

L'allocazione di capitale può essere valutata in modo che (con p "grande")

(I) $Pr(R + G < 0) \leq 1 - p$,

(II) $Pr(R + G < E(G)) \leq 1 - p$.

Il requisito (I):

$$Pr(R + G < 0) \leq 1 - p \quad \Leftrightarrow \quad Pr(-G > R) \leq 1 - p$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - Pr(-G \leq R) \leq 1 - p \quad \Leftrightarrow \quad Pr(-G \leq R) \geq p$$

$$\Leftrightarrow \quad F_L(R) \geq p,$$

dove $L = -G$. Pertanto se

$$R = F_L^{\leftarrow}(p) = min\{x \in \mathbb{R} \mid F_L(x) \geq p\},$$

il requisito è soddisfatto.

Il requisito (II):

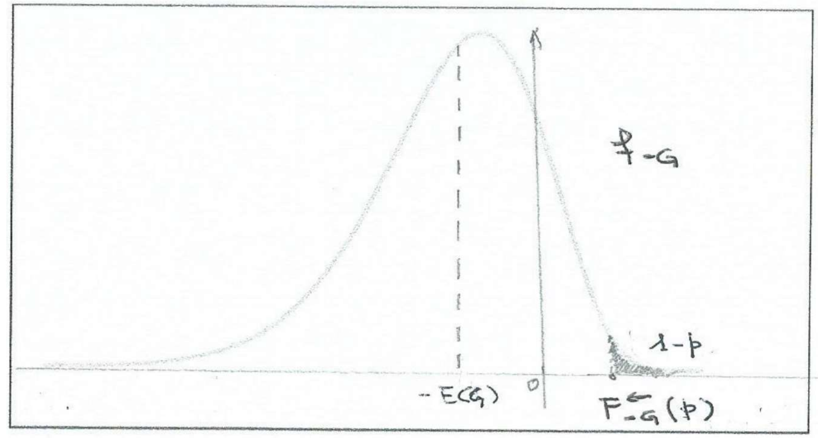
$$Pr(R + G < E(G)) \leq 1 - p \quad \Leftrightarrow \quad F_L(R - E(G)) \geq p.$$

Pertanto se

$$R - E(G) = F_L^{\leftarrow}(p) \quad \Leftrightarrow \quad R = F_L^{\leftarrow}(p) + E(G),$$

il requisito è soddisfatto.

(I) $R = F_L^{\leftarrow}(p)$ (II) $R = F_L^{\leftarrow}(p) + E(G)$



Per la nozione di VaR in relazione ad una posizione G porfit/loss si trovano le due definizioni

- $VaR[G;p] = F_L^{\leftarrow}(p)$, con $L = -G$,
- $VaR[G;1-p] = F_G^{\leftarrow}(1-p)$.

Si noti che nel secondo caso il VaR è negativo e non è dunque interpretabile come capitale allocato, il capitale è $-VaR[G;1-p]$.