$$\mathcal{H}_{phys} = \frac{\operatorname{Ker} Q_B}{\operatorname{Im} Q_B} \longleftrightarrow \text{COHOMOLOGY of } Q_{BRST}$$

Vediamo ora in un esempio semplice che questa condizione riproduce esattamente gli stati fisici che ci aspettiamo.

Per semplicità, consideriamo una teoria ABELIANA (i ghost sono DISACCOPPIATI, ma la procedura di BRST è ancora valida, specialmente nell'identificare gli stati fisici).

- Prendiamo $G(A) = \partial_\mu A^\mu$
- Integriamo su B: le trasformazioni di BRST diventano

$$\delta A_\mu = \partial_\mu c \qquad \delta \bar{c} = -\partial_\mu A^\mu / \xi \qquad \delta c = 0$$

- Espandiamo i campi in operatori di costruzione e distruzione:

$$A^\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p^0}} \left(a^\mu(\bar{p}) e^{ipx} + a^{\mu\dagger}(\bar{p}) e^{-ipx} \right)$$

$$c(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p^0}} \left(d(\bar{p}) e^{ipx} + d^\dagger(\bar{p}) e^{-ipx} \right)$$

$$\bar{c}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p^0}} \left(b(\bar{p}) e^{ipx} + b^\dagger(\bar{p}) e^{-ipx} \right)$$

- $[Q_B, a^\mu(\bar p)] = -p^\mu d(\bar p)$ $\quad$ $[Q_B, a^{\mu\dagger}(\bar p)] = p^\mu d^\dagger(\bar p)$

  $\{Q_B, b(\bar p)\} = p^\mu a_\mu(\bar p)/\xi$ $\quad$ $\{Q_B, b^\dagger(\bar p)\} = p^\mu a^\dagger_\mu(\bar p)/\xi$

  $\{Q_B, d(\bar p)\} = 0$ $\quad$ $\{Q_B, d^\dagger(\bar p)\} = 0$

- Consideriamo gli stati $|\psi\rangle$ t.c. $Q_B|\psi\rangle = 0$
  - gli stati $|e,\psi\rangle \equiv e_\mu a^{\mu\dagger}|\psi\rangle$ sono FISICI se $e_\mu p^\mu = 0$

    $\Rightarrow$ sono fisiche solo polarizzazioni trasverse: se $p^\mu = \begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \\ E \end{pmatrix}$, $e^{phys}_\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
  - gli stati $|\psi\rangle' \equiv b^\dagger(\bar p)|\psi\rangle$ soddisfano $Q_B|\psi\rangle' = \frac{p^\mu}{\xi} a^\dagger_\mu(\bar p)|\psi\rangle$

  $\Rightarrow |e+\alpha p, \psi\rangle = |e_\mu, \psi\rangle + \xi\alpha Q_B|\psi\rangle' \cong |e,\psi\rangle$

  (solita condizione di gauge-invarianza applicata ai vettori di polarizzazione.)

  - Abbiamo anche $Q_B b^\dagger(\bar p)|\psi\rangle = \frac{p^\mu}{\xi} a_\mu(\bar p)|\psi\rangle \neq 0$

    $\rightarrow$ stati $b^\dagger|\psi\rangle$ NON sono fisici

  - $\forall e_\mu$ con $e_\mu p^\mu \neq 0$ $\quad d^\dagger(\bar p)|\psi\rangle = \frac{Q_B\, e_\mu a^{\mu\dagger}(p)|\psi\rangle}{(e\cdot p)} \Rightarrow$

    $\Rightarrow d^\dagger(\bar p)$ è Q_B-esatto $\Rightarrow \cong 0$

  $\Rightarrow \mathcal{H}_{phys}$ non contiene ghost!

- $[a_\mu(\bar p), a^\dagger_\nu(\bar p')] = -\eta_{\mu\nu}\,\delta^{(3)}(\bar p - \bar p') \Rightarrow \|a_0^\dagger|0\rangle\|^2 < 0$

  $\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$

  Lo sp. di Fock NON è uno SPAZIO DI HILBERT

(a_0 è distr. e a_0^+ contr. per consistenza con Lorentz. inv.)

La vera domanda è "$\mathcal{H}_{phys}$ è uno SP. DI HILBERT?"

$\updownarrow$

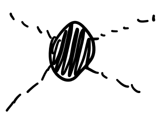
S-matrix è unitaria

La risposta è "sì"

Basta dimostrarlo per una scelta di $G(A)$. Siccome esistono "GAUGE UNITARIE" ⊙ in cui la risposta è manifesta, allora sarà vero anche per le altre scelte di gauge fixing.

⊙ AXIAL GAUGE in YM.
$G(A) = n^\mu A_\mu$

Osservazione:

Il metodo di FP genera una Lagrangiana che è QUADRATICA nei campi c e $\bar{c}$. Qndo si rinormalizza la teoria potrebbe servire di generare dei controtermini cubici o quartici.
Qto non avviene per $G(A) = \partial_\mu A^\mu$, come vedremo. Tuttavia, ci sono altre scelte di $G(A)$ che richiedono termini cubici e quartici in c e $\bar{c}$ per riassorbire gli infiniti in  e 

BRST danno un metodo più generico per generare una classe di Lagrangiane equivalenti, cioè che diano la stessa matrice S tra gli stati fisici:

Prendere $\mathcal{L}$ il più generico funzionale dei campi $\overbrace{A_\mu, \text{matter}, c, \bar{c}, B}^{\equiv \Phi}$ t.c. sia INVARIANTE sotto trasf. BRST e sotto tutte le simmetrie globali della teoria di partenza.

Si può dimostrare che una tale $\mathcal{L}$ è data da

$$\mathcal{L}[\Phi, c, \bar{c}, B] = \mathcal{L}_0[\Phi] + Q_B \cdot \underbrace{\Psi[\Phi, c, \bar{c}, B]}_{\text{funzionale arbitrario di ghost } n^\circ = 1}$$

$Q\Psi$ non è necessariamente quadratico in $c, \bar{c}$

Gli stati fisici sono dati dalla coomologia di Q_B

→ siccome esiste una gauge (per es. $G(A) = n^\mu A_\mu$) in cui i ghost disaccoppiano(*), allora i ghost non sono fisici in ogni gauge (scelta di Ψ).

In qta gauge $\quad \mathcal{L}_{gh} \supset \bar{c}^a(-n^\mu A^c_\mu f^{abc})c^c \quad$ e $\quad \mathcal{L}_{gf} = \frac{1}{2\xi}(n_\mu A^\mu)^2$

Per $\xi \to 0$, $n_\mu A^\mu$ viene localizzato a essere zero $\Rightarrow A_\mu$ scompare da $\mathcal{L}_{gh}$ e $\mathcal{D}c\mathcal{D}\bar{c}\, e^{i\int \mathcal{L}_{gh}}$ fattorizza fuori dal P.I.

Si può anche vedere che per opportuno ξ in qta gauge, $n_\mu \Delta_F^{\mu\nu} = 0 = \Delta_F^{\mu\nu} n_\nu$ e quindi i ghost non interagiscono. Inoltre $\lim_{k^2\to 0} k^2 k_\mu \Delta_F^{\mu\nu} = 0 \Rightarrow$ no poli su polarizz. longitud.

Extra: WARD-TAKAHASHI IDENTITIES for BRST-transformations.

$S = \int d^4x \, \mathcal{L}$ è inv. sotto BRST

$\Rightarrow$ impone delle RELAZIONI sui CORRELATORI

Consideriamo un operatore $\mathcal{O}$ (non necessariamente gauge-inv.)

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \int DA\, Dc\, D\bar{c}\, DB\, \mathcal{O}(A, c, \bar{c}, B)\, e^{iS[A,c,\bar{c},B]}$$

rinominiamo le variab. d'integraz.

$$= \int DA'\, Dc'\, D\bar{c}'\, DB'\, \mathcal{O}(A', c', \bar{c}', B')\, e^{iS[A',c',\bar{c}',B']}$$

cambio di variabili

MISURA INTEG. È INV. (Jac = 1)

$$\begin{cases} A' = A + \epsilon Q_B \cdot A \\ c' = c + \epsilon Q_B \cdot c \\ \bar{c}' = \bar{c} + \epsilon Q_B \cdot \bar{c} \\ B' = B \end{cases}$$

$$= \int DA\, Dc\, D\bar{c}\, DB\, \left(\mathcal{O} + \delta_{BRST} \mathcal{O} \right) e^{iS[A,c,\bar{c},B]}$$

$$= \langle \mathcal{O} \rangle + \langle \delta_{BRST} \mathcal{O} \rangle$$

$$\Rightarrow \langle \delta_B \mathcal{O} \rangle = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \langle Q_B \cdot \mathcal{O} \rangle = 0$$

Ora consideriamo le funz. di Green

$$\tilde{G}(x, x_1, \dots, x_N) = \int DA\, Dc\, D\bar{c}\, DB\; \mathcal{O}(x) \prod_{i=1}^{N} \mathcal{O}_i(x_i)\, e^{iS}$$

BRST invarianti

Facendo stesso procedimento di sopra:

$$\langle (Q_B \cdot O) \prod_i O_i \rangle = 0$$

→ correlatore di un operatore BRST-esatto con qualsiasi op. BRST-inv. è nullo.

Usando qto risultato, si dimostra che i correlatori di operatori BRST-INVARIANTI sono indipendenti dalla scelta del gauge fixing $G(A)$ (qto in particolare è vero per la funz. di partizione $\langle 1 \rangle$)

Dim. Ricordiamoci che $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{g.i.} + Q_{BRST} \cdot \left[\bar{c}^a G^a(A) - \frac{\xi}{2} \bar{c}^a B^a \right]$

⇒ Se prendiamo due diverse funz. $G_1(A)$ e $G_2(A)$, allora

$$S_1 - S_2 = \int d^3x \; Q_B \cdot \left[\bar{c}^a G_1^a(A) - \bar{c}^a G_2^a(A) \right] = Q_B \cdot V_{12}$$

$$\Rightarrow \langle \prod_i \underset{\uparrow \text{BRST-inv.}}{O_i(x_i)} \rangle_1 = \int e^{iS_1} \prod_i O_i = \int e^{iS_2 + iQ_B V_{12}} \prod_i O_i$$

$$e^{iQ_B V_{12}} = 1 - i Q_B R_{12} \quad \text{(ma } Q_B^2 = 0\text{)} \quad R_{12} = \dots V_{12} + \dots V_{12}(Q_B V_{12}) + \dots$$

$$= \int e^{iS_2} \prod_i O_i - \underbrace{i \int e^{iS_2} Q_B \cdot R_{12} \prod_i O_i}_{=0 \text{ per WI}}$$

$$= \langle \prod_i O_i(x_i) \rangle_2$$

"⇒" gli elementi della MATRICE S, che si derivano utilizzando tali correlatori, sono anch'essi indipendenti dalla scelta di $G(A)$.

Qte relazioni sono formali, ci potrebbero essere delle divergenze

→ PI va regolarizzato

Se uno sceglie un REGULATOR che rompe l'inv. per BRST, questi risultati che otteniamo direttamente potrebbero non essere più validi.

Ci sono 3 possibilità:

1) Esiste un REGOL. BRST-inv. e lo usiamo: i risultati trovati sopra sono validi per la teoria regolarizzata (e anche per la teoria rinormalizzata)

2) Esiste un REGOL. BRST-inv. ma non lo usiamo nei conti: proprietà trovate sopra non possono essere applicate, ma i risultati sono ancora validi, anche se nascosti

3) Non esiste un REGOL. BRST-inv.: BRST sym è ANOMALA.