

ESERCIZI INTRODUTTIVI
ALGEBRA LINEARE ED ELEMENTI DI GEOMETRIA
MATEMATICA PER L'ECONOMIA E LA STATISTICA 2
A.A. 2023/24

Esercizio 1

Considera l'equazione di cui ci siamo occupati a lezione, ovvero

$$3x + y - 2z = 0.$$

Calcola tre soluzioni di questa equazione, assegnando rispettivamente i valori

$$y = 1 \text{ e } z = 2$$

$$y = -1 \text{ e } z = -2$$

$$y = 2 \text{ e } z = 1$$

e determinando il corrispondente valore di x .

Risoluzione. Sostituendo i valori per y e z otteniamo:

$$\begin{array}{ll} \text{per } y = 1, z = 2 & 3x + 1 - 2 \cdot 2 = 0 \Rightarrow x = 1, \\ \text{per } y = -1, z = -2 & 3x - 1 - 2 \cdot (-2) = 0 \Rightarrow x = -1, \\ \text{per } y = 2, z = 1 & 3x + 2 - 2 \cdot 1 = 0 \Rightarrow x = 0, \end{array}$$

Le tre soluzioni sono dunque, rispettivamente:

$$(1, 1, 2), \quad (-1, -1, -2), \quad (0, 2, 1).$$

Esercizio 2

Considera il sistema

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ -x + 3y - z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$$

Utilizza la tecnica vista in classe per eliminare prima la variabile x dalla seconda e dalla terza equazione (aggiungendo o sottraendo opportuni multipli della prima equazione) e poi per eliminare la variabile y dalla terza equazione (aggiungendo o sottraendo opportuni multipli della nuova seconda equazione). A questo punto **calcola** la/le soluzioni del sistema. **Scrivi** poi la matrice dei coefficienti del sistema e **ripercorsi** sulle sue righe le operazioni che hai svolto sulle equazioni.

Risoluzione. Per eliminare la variabile x dalla seconda equazione, la sommiamo alla prima equazione. Al membro sinistro otteniamo

$$(-x + 3y - z) + (x - y + 2z) = 2y + z.$$

Per eliminare la variabile x dalla terza equazione, ci sottraiamo la prima equazione moltiplicata per 2. Al membro sinistro otteniamo

$$(2x + y + z) - 2(x - y + 2z) = 3y - 3z.$$

Il sistema diventa quindi

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2y + z = 0 \\ 3y - 3z = 0 \end{cases}$$

Per semplificare la situazione, notiamo che possiamo moltiplicare la terza equazione per $1/3$, così da ottenere $y - z = 0$. Ora, se vogliamo eliminare la variabile y dalla terza equazione, ci dobbiamo sottrarre la seconda moltiplicata per $1/2$. Al membro sinistro otteniamo:

$$(y - z) - (1/2) \cdot (2y + z) = (-3/2)z.$$

Il sistema diventa quindi

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2y + z = 0 \\ (-3/2) \cdot z = 0 \end{cases}$$

Risolvendo l'ultima equazione otteniamo $z = 0$. Risolvendo la seconda equazione otteniamo $y = 0$ e quindi risolvendo la prima equazione otteniamo $x = 0$. Pertanto, l'unica soluzione è $(0, 0, 0)$.

La matrice dei coefficienti del sistema di partenza è

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Le prime due operazioni portano la matrice nella forma

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Ora l'operazione sulla terza riga trasforma la matrice in

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Infine l'ultima operazione sulla terza riga trasforma la matrice in

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3/2 \end{pmatrix}$$

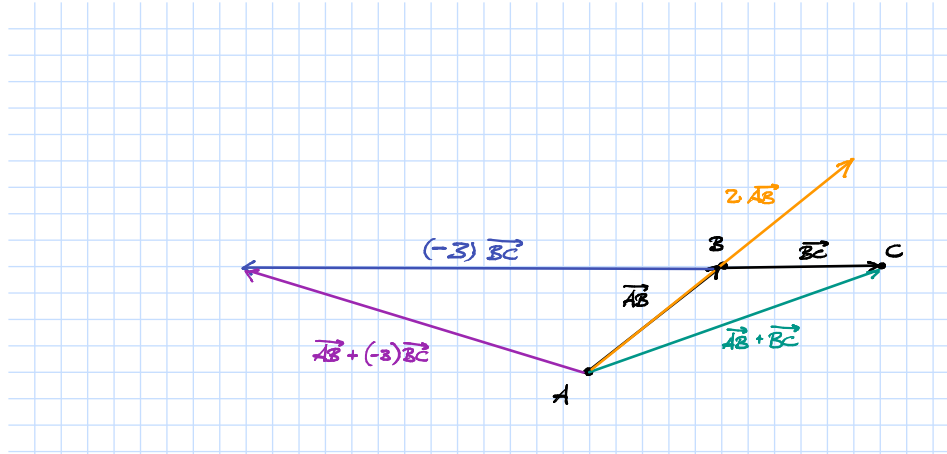
Esercizio 3

Disegna nel piano due vettori applicati \vec{AB} e \vec{BC} , a piacere (nota che, qualsiasi sia la scelta per i due vettori applicati, per come sono stati descritti il punto finale del primo vettore applicato deve coincidere con il punto iniziale del secondo vettore applicato).

Disegna ora i seguenti vettori applicati: $\vec{AB} + \vec{BC}$, $2 \cdot \vec{AB}$, $\vec{AB} + ((-3) \cdot \vec{BC})$.

Disegna inoltre tre vettori applicati che appartengano alla classe di equipollenza di \vec{AB} e tre vettori applicati che appartengano alla classe di equipollenza di $(-1) \cdot \vec{BC}$.

Risoluzione.



Esercizio 4

Dati due vettori applicati \vec{AB} e \vec{CD} , **quali condizioni** devono sussistere sui punti A, B, C, D affinché entrambe le somme $\vec{AB} + \vec{CD}$ e $\vec{CD} + \vec{AB}$ siano definite? Quando sono entrambe definite, qual è il **risultato** della somma in ciascuno dei casi?

Risoluzione. Affinché la somma di vettori applicati $\vec{AB} + \vec{CD}$ sia definita deve essere che il punto finale del primo vettore applicato coincida con il punto iniziale del secondo vettore applicato, ovvero $B = C$. Affinché la somma di vettori applicati $\vec{CD} + \vec{AB}$ sia definita deve essere che il punto finale del primo vettore applicato coincida con il punto iniziale del secondo vettore applicato, ovvero $D = A$. In definitiva, dunque, affinché entrambe le somme siano definite deve essere che $\vec{CD} = \vec{BA}$. In questo caso vale che $\vec{AB} + \vec{BA} = \vec{AA}$ (il vettore applicato nullo puntato in A) e $\vec{BA} + \vec{AB} = \vec{BB}$ (il vettore applicato nullo puntato in B).

Esercizio 5

Considera l'insieme V delle coppie ordinate di numeri (a, b) di numeri reali, ovvero

$$V := \{(a, b) : a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}.$$

Ad esempio sono elementi di V le coppie $(1, 2)$, $(-5, 3)$, $(\sqrt{3}, 0.34)$. L'insieme V è anche denotato \mathbb{R}^2 .

Date due coppie $(a, b) \in V$ e $(c, d) \in V$, definiamo la loro somma come

$$(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d).$$

Notiamo quindi che anche la somma $(a, b) + (c, d)$ è un elemento di V . **Dimostra** che questa operazione di somma gode della proprietà commutativa e della proprietà associativa.

Data una coppia $(a, b) \in V$ e un numero reale $\lambda \in \mathbb{R}$, definiamo la moltiplicazione della coppia (a, b) per lo scalare¹ λ come

$$\lambda \cdot (a, b) := (\lambda a, \lambda b).$$

Notiamo quindi che anche $\lambda \cdot (a, b)$ è un elemento di V . **Dimostra** infine che per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e per ogni $(a, b), (c, d) \in V$ valgono le proprietà distributive

$$\begin{aligned}\lambda \cdot ((a, b) + (c, d)) &= \lambda \cdot (a, b) + \lambda \cdot (c, d) \\ (\lambda + \mu) \cdot (a, b) &= \lambda \cdot (a, b) + \mu \cdot (a, b)\end{aligned}$$

Risoluzione.

- (1) Dimostriamo che l'operazione di somma gode della proprietà commutativa. Per farlo, dobbiamo mostrare che per ogni $(a, b), (c, d) \in V$ vale che

$$(a, b) + (c, d) = (c, d) + (a, b).$$

Al fine di portare a termine la dimostrazione, useremo due ingredienti: il fatto che la somma tra numeri reali gode della proprietà commutativa e il fatto che la relazione di uguaglianza gode della proprietà transitiva (in particolare che se mostriamo che $X = Y$ e $Z = Y$, allora da ciò segue che $X = Z$).

Usando la definizione della somma tra coppie, abbiamo che

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d).$$

Ora, usando il fatto che la somma tra numeri reali gode della proprietà commutativa, abbiamo che $a + c = c + a$ e $b + d = d + b$, pertanto possiamo riscrivere la somma precedente come

$$(a, b) + (c, d) = (c + a, d + b).$$

Ora usiamo la definizione di somma per calcolare $(c, d) + (a, b)$:

$$(c, d) + (a, b) = (c + a, d + b).$$

Dal momento che abbiamo mostrato che sia $(a, b) + (c, d)$ che $(c, d) + (a, b)$ sono uguali alla medesima quantità, per la proprietà transitiva dell'uguaglianza abbiamo dimostrato la tesi.

- (2) Dimostriamo che l'operazione di somma gode della proprietà associativa. Per farlo, dobbiamo mostrare che per ogni $(a, b), (c, d), (e, f) \in V$ vale che

$$((a, b) + (c, d)) + (e, f) = (a, b) + ((c, d) + (e, f)).$$

Al fine di portare a termine la dimostrazione, useremo due ingredienti: il fatto che la somma tra numeri reali gode della proprietà associativa e il fatto che la relazione di uguaglianza gode della proprietà transitiva (in particolare che se mostriamo che $X = Y$ e $Z = Y$, allora da ciò segue che $X = Z$).

Usando la definizione della somma tra coppie, abbiamo che

$$((a, b) + (c, d)) + (e, f) = (a + c, b + d) + (e, f) = ((a + c) + e, (b + d) + f).$$

¹Qui "scalare" è sinonimo di "numero reale".

Ora, usando il fatto che la somma tra numeri reali gode della proprietà associativa, abbiamo che $(a + c) + e = a + (c + e)$ e $(b + d) + f = b + (d + f)$, pertanto possiamo riscrivere la somma precedente come

$$((a, b) + (c, d)) + (e, f) = (a + c, b + d) + (e, f) = (a + (c + e), b + (d + f)).$$

Ora usiamo la definizione di somma per calcolare $(a, b) + ((c, d) + (e, f))$:

$$(a, b) + ((c, d) + (e, f)) = (a + (c + e), b + (d + f)).$$

Dal momento che abbiamo mostrato che sia $((a, b) + (c, d)) + (e, f)$ che $(a, b) + ((c, d) + (e, f))$ sono uguali alla medesima quantità, per la proprietà transitiva dell'uguaglianza abbiamo dimostrato la tesi.

- (3) Dimostriamo la prima proprietà distributiva del prodotto di uno scalare rispetto alla somma di coppie. Per farlo, dobbiamo mostrare che per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ e per ogni $(a, b), (c, d) \in V$ vale che

$$\lambda \cdot ((a, b) + (c, d)) = \lambda \cdot (a, b) + \lambda \cdot (c, d).$$

Al fine di portare a termine la dimostrazione, useremo due ingredienti: il fatto che la il prodotto tra numeri reali gode della proprietà distributiva rispetto alla somma tra numeri reali e il fatto che la relazione di uguaglianza gode della proprietà transitiva (in particolare che se mostriamo che $X = Y$ e $Z = Y$, allora da ciò segue che $X = Z$).

Usiamo le definizioni di somma tra coppie e moltiplicazione per uno scalare e troviamo:

$$\lambda \cdot ((a, b) + (c, d)) = \lambda \cdot (a + c, b + d) = (\lambda(a + c), \lambda(b + d)).$$

Dal momento che il prodotto e la somma di numeri interi godono della proprietà distributiva, vale che $\lambda(a + c) = \lambda a + \lambda c$ e $\lambda(b + d) = \lambda b + \lambda d$; pertanto possiamo scrivere

$$\lambda \cdot ((a, b) + (c, d)) = (\lambda a + \lambda c, \lambda b + \lambda d).$$

Ora usiamo nuovamente la definizione di somma di coppie e di moltiplicazione per uno scalare:

$$\lambda \cdot (a, b) + \lambda \cdot (c, d) = (\lambda a, \lambda b) + (\lambda c, \lambda d) = (\lambda a + \lambda c, \lambda b + \lambda d).$$

Dal momento che abbiamo mostrato che sia $\lambda \cdot ((a, b) + (c, d))$ che $\lambda \cdot (a, b) + \lambda \cdot (c, d)$ sono uguali alla medesima quantità, per la proprietà transitiva dell'uguaglianza abbiamo dimostrato la tesi.

- (4) Dimostriamo la seconda proprietà distributiva del prodotto di uno scalare rispetto alla somma di coppie. Per farlo, dobbiamo mostrare che per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e per ogni $(a, b) \in V$ vale che

$$(\lambda + \mu) \cdot (a, b) = \lambda \cdot (a, b) + \mu \cdot (a, b).$$

Al fine di portare a termine la dimostrazione, useremo due ingredienti: il fatto che la il prodotto tra numeri reali gode della proprietà distributiva rispetto alla somma tra numeri reali e il fatto che la relazione di uguaglianza gode della proprietà transitiva (in particolare che se mostriamo che $X = Y$ e $Z = Y$, allora da ciò segue che $X = Z$).

Usiamo le definizioni di somma tra coppie e moltiplicazione per uno scalare e troviamo:

$$(\lambda + \mu) \cdot (a, b) = ((\lambda + \mu)a, (\lambda + \mu)b).$$

Dal momento che il prodotto e la somma di numeri interi godono della proprietà distributiva, vale che $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$ e $(\lambda + \mu)b = \lambda b + \mu b$; pertanto possiamo scrivere

$$(\lambda + \mu) \cdot (a, b) = (\lambda a + \mu a, \lambda b + \mu b).$$

Ora usiamo nuovamente la definizione di somma di coppie e di moltiplicazione per uno scalare:

$$\lambda \cdot (a, b) + \mu \cdot (a, b) = (\lambda a, \lambda b) + (\mu a, \mu b) = (\lambda a + \mu a, \lambda b + \mu b).$$

Dal momento che abbiamo mostrato che sia $(\lambda + \mu) \cdot (a, b)$ che $\lambda \cdot (a, b) + \mu \cdot (a, b)$ sono uguali alla medesima quantità, per la proprietà transitiva dell'uguaglianza abbiamo dimostrato la tesi.