ESERCIZI SU SPAZI VETTORIALI
ALGEBRA LINEARE ED ELEMENTI DI GEOMETRIA
MATEMATICA PER L'ECONOMIA E LA STATISTICA 2
A.A. 2023/24

Esercizio 1

Sia V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale. **Dimostra**, usando le otto proprietà che definiscono gli spazi vettoriali, che per ogni vettore $v \in V$ esiste *un unico* vettore opposto $-v$. Ricorda che la definizione di spazio vettoriale richiede solamente che un vettore opposto esiste, ma non richiedono l'unicità di tale vettore opposto.

Risoluzione. Supponiamo che per un certo $v \in V$ valga che esistano due elementi $w_1, w_2 \in V$ che soddisfano la proprietà di essere opposti di v, ovvero

$$v + w_1 = w_1 + v = 0 \qquad (*)$$
$$v + w_2 = w_2 + v = 0 \qquad (\triangle)$$

Mostriamo ora che $w_1 = w_2$; così facendo, avremo provato ciò che vogliamo dimostrare.
Abbiamo che

$$w_1 \overset{\text{el. neutro}}{=} w_1 + 0 \overset{(\triangle)}{=} w_1 + (v + w_2) \overset{\text{associatività}}{=} (w_1 + v) + w_2 \overset{(*)}{=} 0 + w_2 \overset{\text{el. neutro}}{=} w_2$$

Quindi $w_1 = w_2$ per la transitività dell'uguaglianza, come volevamo mostrare.

Esercizio 2

Ricorda che $\mathbb{R}^3$ è l'insieme delle terne ordinate di numeri reali:

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Abbiamo visto che $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ è un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale, dove $+$ e $\cdot$ sono definite componente per componente.
Considera il sottoinsieme $W \subset \mathbb{R}^3$ dato da:

$$W := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0 \quad \text{e} \quad 2x - y - z = 0\}.$$

Dimostra che W è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

Risoluzione. Per mostrare che W è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ dobbiamo mostrare tre cose:

(1) $(0, 0, 0) \in W$;
(2) per ogni $v, w \in W$ vale che $v + w \in W$;
(3) per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ e per ogni $v \in W$ vale che $\lambda \cdot v \in W$.

Dimostriamo ciascuna delle proprietà

(1) Vale che $(0,0,0) \in W$ se e solo se la terna $(0,0,0)$ soddisfa le due equazioni che definiscono gli elementi di W, ovvero se sostituendo $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$ nelle due equazioni $x + y + z = 0$ e $2x - y - z = 0$ esse sono soddisfatte. Questo è vero, dal momento che $0 + 0 + 0 = 0$ e $2 \cdot 0 - 0 - 0 = 0$. Pertanto $(0,0,0) \in W$.

(2) Siano $v, w \in W$, dobbiamo mostrare che $v + w \in W$. Se scriviamo

$$v = (v_1, v_2, v_3) \quad \text{e} \quad w = (w_1, w_2, w_3)$$

allora sappiamo che

$$\begin{cases} v_1 + v_2 + v_3 = 0 \\ 2v_1 - v_2 - v_3 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} w_1 + w_2 + w_3 = 0 \\ 2w_1 - w_2 - w_3 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Ora, dalla definizione di somma in $\mathbb{R}^3$ abbiamo che $v + w = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3)$. Vale che $v + w \in W$ se e solo se

$$\begin{cases} (v_1 + w_1) + (v_2 + w_2) + (v_3 + w_3) = 0 \\ 2(v_1 + w_1) - (v_2 + w_2) - (v_3 + w_3) = 0 \end{cases}$$

Per dimostrare che le precedenti due equazioni sono soddisfatte usiamo ciò che sappiamo, ovvero il fatto che le equazioni (1) sono soddisfatte. Vale dunque che

$$(v_1 + w_1) + (v_2 + w_2) + (v_3 + w_3) = (v_1 + v_2 + v_3) + (w_1 + w_2 + w_3) = 0 + 0 = 0$$

e

$$2(v_1 + w_1) - (v_2 + w_2) - (v_3 + w_3) = (2v_1 - v_2 - v_3) + (2w_1 - w_2 - w_3) = 0 + 0 = 0\,.$$

Concludiamo quindi che $v + w \in W$.

(3) Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ e sia $v \in W$, dobbiamo mostrare che $\lambda \cdot v \in W$. Se scriviamo

$$v = (v_1, v_2, v_3)$$

allora sappiamo che

$$\begin{cases} v_1 + v_2 + v_3 = 0 \\ 2v_1 - v_2 - v_3 = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Ora, dalla definizione di moltiplicazione per uno scalre in $\mathbb{R}^3$ abbiamo che $\lambda \cdot v = (\lambda\, v_1, \lambda\, v_2, \lambda\, v_3)$. Vale che $\lambda \cdot v \in W$ se e solo se

$$\begin{cases} (\lambda\, v_1) + (\lambda\, v_2) + (\lambda\, v_3) = 0 \\ 2(\lambda\, v_1) - (\lambda\, v_2) - (\lambda\, v_3) = 0 \end{cases}$$

Per dimostrare che le precedenti due equazioni sono soddisfatte usiamo ciò che sappiamo, ovvero il fatto che le equazioni (2) sono soddisfatte. Vale dunque che

$$(\lambda\, v_1) + (\lambda\, v_2) + (\lambda\, v_3) = \lambda(v_1 + v_2 + v_3) = \lambda \cdot 0 = 0$$

e

$$2(\lambda\, v_1) - (\lambda\, v_2) - (\lambda\, v_3) = \lambda(2v_1 - v_2 - v_3) = \lambda \cdot 0 = 0\,.$$

Concludiamo quindi che $\lambda \cdot v \in W$.

Esercizio 3

Calcola quattro diverse soluzioni del sistema

$$\begin{cases} -x + 2y - z = 0 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases}$$

Crea poi una matrice A in modo che le *colonne* di tale matrice siano date dalle quattro soluzioni che hai calcolato precedentemente. **Scrivi** poi le tre righe $A_{(1)}$, $A_{(2)}$ e $A_{(3)}$ della matrice A.

Risoluzione. Quattro soluzioni distinte del sistema sono date da:

$$x = 1,\ y = 1,\ z = 1$$
$$x = -1,\ y = 1,\ z = 3$$
$$x = 0,\ y = 1,\ z = 2$$
$$x = 1,\ y = 0,\ z = -1$$

La matrice che otteniamo disponendo le soluzioni come colonne è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Questa è dunque una matrice 3×4, le cui righe sono

$$A_{(1)} = (1 \quad -1 \quad 0 \quad 1)$$
$$A_{(2)} = (1 \quad 1 \quad 1 \quad 0)$$
$$A_{(3)} = (1 \quad 3 \quad 2 \quad -1)$$

Esercizio 4

Ricorda che l'insieme dei *polinomi* in una variabile a coefficienti reali, che denotiamo con $\mathbb{R}[x]$, è l'insieme delle espressioni del tipo:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0$$

dove $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}$. I numeri $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ sono detti i *coefficienti* del polinomio; in particolare, per ogni $i \in \{0, \ldots, n\}$, il numero a_i è detto il coefficiente di x^i. In questo caso si dice che il polinomio ha *grado* n se $a_n \neq 0$ (al polinomio 0 non si assegna grado). Sono quindi esempi di polinomi:

$$3x^2 + 4x - 1\,, \quad \text{oppure} \quad x^{12} - \sqrt{17}\,, \quad \text{oppure} \quad x^4 - 2x^2 + x + 3\,.$$

Tali polinomi hanno rispettivamente grado 2, 12 e 4.

Definiamo la *somma* tra polinomi nel modo seguente:

$$\begin{array}{rccc} +\colon & \mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}[x] & \to & \mathbb{R}[x] \\ & (p, q) & \mapsto & p + q \end{array}$$

dove il polinomio $p + q$ è definito nella maniera seguente. Se

$$p = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad \text{e} \quad q = b_m x^n + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

per qualche $n, m \in \mathbb{N}$ e per $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}$ e $b_0, b_1, \dots, b_{m-1}, b_m \in \mathbb{R}$, allora:

se $n = m$:

$$p + q := (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$$

se $n > m$:

$$p+q := a_n x^n+\cdots+a_{m+1}x^{m+1}+(a_m+b_m)x^m+(a_{m-1}+b_{m-1})x^{m-1}+\cdots+(a_1+b_1)x+(a_0+b_0)$$

se $n < m$:

$$p+q := b_m x^m+\cdots+b_{n+1}x^{n+1}+(a_n+b_n)x^n+(a_{n-1}+b_{n-1})x^{n-1}+\cdots+(a_1+b_1)x+(a_0+b_0)$$

Ad esempio, abbiamo che

$$(3x^3 + 2x + 1) + (-4x^2 + 3x + 2) = 3x^3 - 4x^2 + 5x + 3\,.$$

Definiamo la *moltiplicazione per uno scalare* tra un numero reale e un polinomio nel modo seguente:

$$\begin{array}{rccc} +: & \mathbb{R} \times \mathbb{R}[x] & \to & \mathbb{R}[x] \\ & (\lambda, p) & \mapsto & \lambda \cdot p \end{array}$$

dove il polinomio $\lambda \cdot p$ è definito nella maniera seguente. Se

$$p = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0\,,$$

allora definiamo

$$\lambda \cdot p := (\lambda\, a_n)x^n + (\lambda\, a_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (\lambda\, a_1)x + (\lambda\, a_0)\,.$$

Ad esempio abbiamo che

$$2 \cdot (x^5 + 2x^3 - 1) = 2x^5 + 4x^3 - 2\,.$$

Verifica che $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$ soddisfa le proprietà V3, V4, V7 e V8 degli $\mathbb{R}$-spazi vettoriali. Invero, vale che $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$ soddisfa *tutte* le proprietà degli $\mathbb{R}$-spazi vettoriali e quindi è un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale.

Risoluzione. Verifichiamo le quattro proprietà.

V3: Mostriamo che il polinomio 0 gioca il ruolo di elemento neutro della somma di $\mathbb{R}[x]$. Per farlo, mostriamo che per ogni $p \in \mathbb{R}[x]$ vale che $p+0 = 0+p = p$. Se scriviamo $p = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, allora

$$\begin{aligned} p + 0 &= (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) + 0 \\ &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + (a_0 + 0) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = p \end{aligned}$$

e analogamente

$$\begin{aligned} 0 + p &= 0 + (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) \\ &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + (a_0 + 0) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = p \end{aligned}$$

V4: Mostriamo che per ogni polinomio $p \in \mathbb{R}[x]$ esiste il suo opposto rispetto alla somma. Per farlo, mostriamo che se $p = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, allora il suo opposto è dato da $q = (-a_n)x^n + (-a_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (-a_1)x + (-a_0)$, ovvero che $p + q = q + p = 0$. Infatti

$$\begin{aligned} p + q &= (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) + \big((-a_n)x^n + (-a_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (-a_1)x + (-a_0)\big) \\ &= (a_n - a_n)x^n + (a_{n-1} - a_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_1 - a_1)x + (a_0 - a_0) = 0 \end{aligned}$$

e analogamente

$$\begin{aligned} q + p &= \big((-a_n)x^n + (-a_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (-a_1)x + (-a_0)\big) + (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) \\ &= (-a_n + a_n)x^n + (-a_{n-1} + a_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (-a_1 + a_1)x + (-a_0 + a_0) = 0 \end{aligned}$$

V7: Siano $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e $p \in \mathbb{R}[x]$. Mostriamo che $(\lambda\,\mu) \cdot p = \lambda \cdot (\mu \cdot p)$. Per farlo, scriviamo $p = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$. Allora

$$\begin{aligned} (\lambda\,\mu) \cdot p &= (\lambda\,\mu) \cdot (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) = \\ &= \big((\lambda\,\mu)\,a_n\big)x^n + \big((\lambda\,\mu)\,a_{n-1}\big)x^{n-1} + \cdots + \big((\lambda\,\mu)\,a_1\big)x + \big((\lambda\,\mu)\,a_0\big) = \\ &= \big(\lambda\,(\mu\,a_n)\big)x^n + \big(\lambda\,(\mu\,a_{n-1})\big)x^{n-1} + \cdots + \big(\lambda\,(\mu\,a_1)\big)x + \big(\lambda\,(\mu\,a_0)\big) \end{aligned}$$

D'altro canto

$$\begin{aligned} \lambda \cdot (\mu \cdot p) &= \lambda \cdot \big(\mu \cdot (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0)\big) = \\ &= \lambda \cdot \big((\mu\,a_n)x^n + (\mu\,a_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (\mu\,a_1)x + (\mu\,a_0)\big) \\ &= \big(\lambda\,(\mu\,a_n)\big)x^n + \big(\lambda\,(\mu\,a_{n-1})\big)x^{n-1} + \cdots + \big(\lambda\,(\mu\,a_1)\big)x + \big(\lambda\,(\mu\,a_0)\big) \end{aligned}$$

Per la proprietà transitiva dell'uguaglianza, questo mostra che $(\lambda\,\mu) \cdot p = \lambda \cdot (\mu \cdot p)$.

V8: Mostriamo che se $p \in \mathbb{R}[x]$, allora $1 \cdot p = p$. Per farlo, scriviamo $p = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$. Per la definizione della moltiplicazione di un polinomio per uno scalare, abbiamo

$$\begin{aligned} 1 \cdot p &= 1 \cdot (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) \\ &= (1\,a_n)x^n + (1\,a_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (1\,a_1)x + (1\,a_0) \\ &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = p \end{aligned}$$

Esercizio 5

Ricorda dall'Esercizio 4 che $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$ è un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale. Considera il sottoinsieme $W \subset \mathbb{R}[x]$ dato da:

$$W := \{p \in \mathbb{R}[x] \mid p = 0 \text{ oppure } p \text{ ha grado minore o uguale a } 2\}\,.$$

In altre parole, gli elementi di W sono tutti e soli i polinomi della forma

$$a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad \text{con } a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Dimostra che W è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]$.

Risoluzione. Per mostrare che W è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]$ dobbiamo mostrare che

(1) $0 \in W$;
(2) per ogni $p, q \in W$ vale che $p + q \in W$;

(3) per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ e per ogni $p \in W$ vale che $\lambda \cdot p \in W$.

Dimostriamo tutte e tre le proprietà.

(1) Per definizione, abbiamo che $0 \in W$.

(2) Siano $p, q \in W$, allora p e q sono della forma

$$p = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$
$$q = b_2 x^2 + b_1 x + b_0$$

dove $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ e $b_0, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. Allora

$$p + q = (a_2 x^2 + a_1 x + a_0) + (b_2 x^2 + b_1 x + b_0) = (a_2 + b_2)x^2 + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$$

il quale è ancora un elemento di W, dunque $p + q \in W$.

(3) Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ e sia $p \in \mathbb{R}[x]$. Allora p è della forma

$$p = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

dove $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Allora

$$\lambda \cdot p = \lambda \cdot (a_2 x^2 + a_1 x + a_0) = (\lambda\, a_2)x^2 + (\lambda\, a_1)x + (\lambda\, a_0)$$

il quale è ancora un elemento di W, dunque $\lambda \cdot p \in W$.