Sistemi di generatori e indipendenza lineare.

Lemma: sia V uno spazio vettoriale su K (un campo); siano $U, W \subseteq V$ sottospazi vettoriali; allora $U \cap W$ è sottospazio vettoriale di V

Dim: verifichiamo che $U \cap W$ soddisfa le tre proprietà di sottospazio vettoriale

1. mostriamo che $0 \in U \cap W$; dato che U e W sono sottospazi vettoriali, allora $0 \in U$ e $0 \in W$; allora $0 \in U \cap W$.
2. mostriamo che se $v_1, v_2 \in U \cap W$, allora $v_1 + v_2 \in U \cap W$; supponiamo che $v_1, v_2 \in U \cap W$; allora $v_1, v_2 \in U$ e $v_1, v_2 \in W$; dato che U e W sono sottospazi vettoriali $v_1 + v_2 \in U$ e $v_1 + v_2 \in W$; allora $v_1 + v_2 \in U \cap W$.
3. mostriamo che se $v \in U \cap W$ e $\lambda \in K$, allora $\lambda \cdot v \in U \cap W$; consideriamo quindi $\lambda \in K$ e $v \in U \cap W$; allora $v \in U$ e $v \in W$; dato che U e W sono sottospazi vettoriali, allora $\lambda \cdot v \in U$ e $\lambda \cdot v \in W$; allora $\lambda \cdot v \in U \cap W$. $\square$

Oss: non è vero che se V è spazio vettoriale su K e $U, W \subseteq V$ sono sottospazi vettoriali, allora $U \cup W$ è sottospazio vettoriale; infatti esistono sottospazi U e W la cui unione non è un sottospazio (esercizio: mostrare che le proprietà 1 e 3. valgono anche per $U \cup W$)

considero $U, W \subseteq \mathbb{R}^2$

$$U = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 2x - y = 0 \}$$

$$W = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x - 2y = 0 \}$$

notiamo che U e W sono sottospazi vettoriali; notiamo che

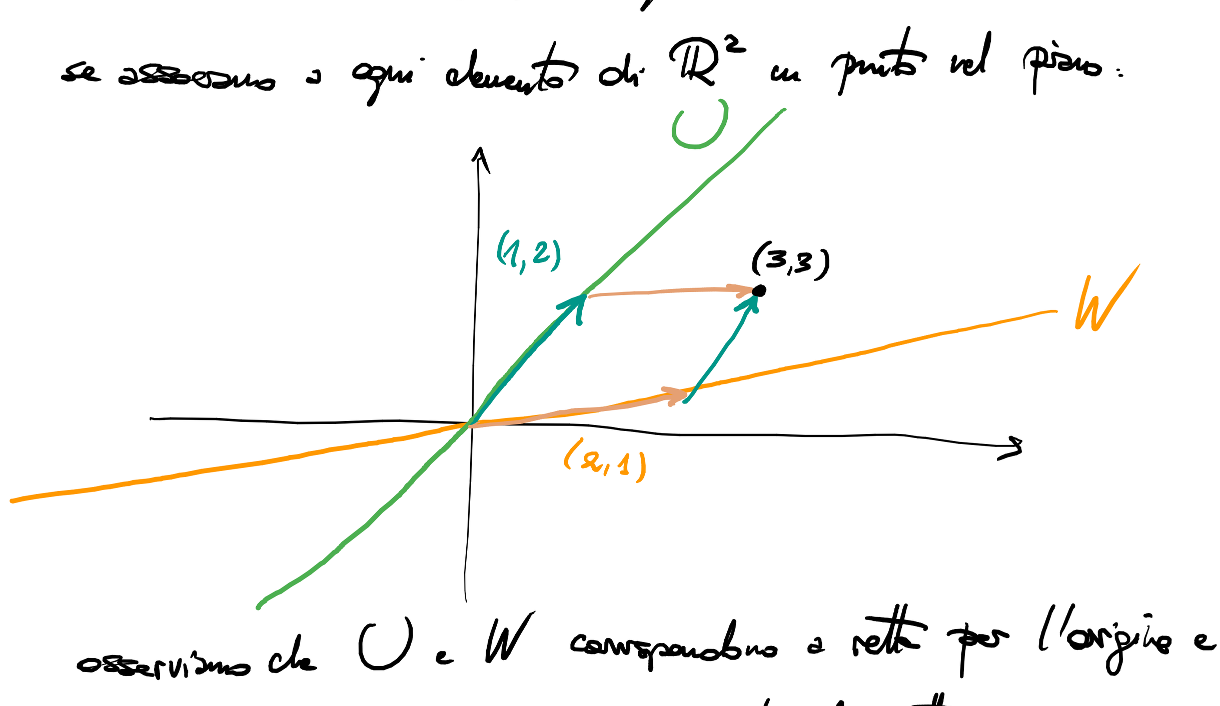
$$(1,2) \in U \qquad e \qquad (2,1) \in W$$

verifichiamo che $(1,2) + (2,1) \notin U \cup W$: infatti

$$(1,2) + (2,1) = (3,3)$$

ma $(3,3)$ non soddisfa né l'equazione di U né quella di W;

se associamo a ogni elemento di $\mathbb{R}^2$ un punto nel piano:



osserviamo che U e W corrispondono a rette per l'origine e che $(3,3)$ non appartiene all'unione di queste due rette.

Def: sia V uno spazio vettoriale su K, siano U e W due sottospazi vettoriali di V; definiamo:

$$U + W = \{ u + w : \ u \in U, \ w \in W \}$$

e chiamiamo questo insieme il sottospazio vettoriale <u>somma</u> di U e W.

Lemma: $U + W$ è un sottospazio vettoriale di V

Dim: per esercizio.

Lemma: con la notazione precedente, vale che $U \subseteq U + W$ e $W \subseteq U + W$

Dim: mostrare che $U \subseteq U + W$ significa mostrare che $\forall u \in U$, vale che $u \in U + W$ (e analogamente per gli elementi di W); per farlo, dato $u \in U$, dobbiamo mostrare che u si può scrivere come somma di un elemento di U e di un elemento di W; ora

$$u = \underset{\overset{\cap}{U}}{u} + \underset{\overset{\cap}{W}}{0} \qquad \text{quindi } u \in U + W$$

Cor: $U \cup W \subseteq U + W$; inoltre si può mostrare che $U + W$ è il più piccolo sottospazio di V che contiene $U \cup W$.

Def: sia V uno spazio vettoriale su K; siano $v_1, \dots, v_n \in V$; allora una <u>combinazione lineare</u> di $v_1, \dots, v_n$ è un qualsiasi vettore della forma

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \dots + \lambda_n \cdot v_n$$

dove $\lambda_i \in K \ \forall i \in \{1, \dots, n\}$.

Esempio: in $\mathbb{Q}^2$, considero

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

una combinazione lineare di v_1, v_2, v_3 è, ad esempio:

$$\frac{3}{4} \cdot v_1 - \frac{12}{7} \cdot v_2 + 15 \cdot v_3$$

Def: sia V uno spazio vettoriale su K e siano $v_1, \dots, v_n \in V$; definiamo

$$\mathrm{span}(v_1, \dots, v_n) := \{ \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n : \ \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K \} =$$

$$= \{ \text{combinazioni lineari di } v_1, \dots, v_n \}$$

Lemma: $\mathrm{span}(v_1, \dots, v_n)$ è un sottospazio vettoriale di V.

Dim:
1. $0 = 0 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_n$, dunque $0 \in \mathrm{span}(v_1, \dots, v_n)$
2. siano $u, w \in \mathrm{span}(v_1, \dots, v_n)$, dobbiamo mostrare che $u + w \in \mathrm{span}(v_1, \dots, v_n)$; per ipotesi $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$ con $\lambda_i \in K$ e $w = \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i$ con $\mu_i \in K$; allora $u + w = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot v_i + \sum_{i=1}^{n} \mu_i \cdot v_i = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \mu_i) \cdot v_i$, dunque $u + w \in \mathrm{span}(v_1, \dots, v_n)$
3. siano $u \in \mathrm{span}(v_1, \dots, v_n)$ e $\lambda \in K$, devo mostrare che $\lambda \cdot u \in \mathrm{span}(v_1, \dots, v_n)$; per ipotesi, $u = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ con $\lambda_i \in K \ \forall i \in \{1, \dots, n\}$; allora $\lambda \cdot u = (\lambda \cdot \lambda_1) v_1 + \dots + (\lambda \cdot \lambda_n) v_n$, dunque $\lambda \cdot u \in \mathrm{span}(v_1, \dots, v_n)$.

Def: sia V uno spazio vettoriale su K e sia $U \subseteq V$ un sottospazio vettoriale; un insieme di elementi $\{u_1, \dots, u_n\} \subseteq U$ si dicono un <u>sistema di generatori</u> di/per U se ogni vettore $u \in U$ è combinazione lineare di $u_1, \dots, u_n$; equivalentemente $\{u_1, \dots, u_n\}$ è un sistema di generatori di U se e solo se $U = \mathrm{span}(u_1, \dots, u_n)$.

Esempio: consideriamo in $V = \mathbb{R}^2$ il sottospazio $U = \mathbb{R}^2$ e i vettori

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

vale che $\{u_1, u_2\}$ è un sistema di generatori per U; infatti, dato $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in U$, abbiamo che

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a \cdot u_1 + b \cdot u_2$$

notiamo inoltre che se definiamo

$$u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

allora anche $\{u_1, u_2, u_3\}$ è un sistema di generatori per $U = \mathbb{R}^2$.

Oss: se $\{u_1, \dots, u_n\}$ è un sistema di generatori di un sottospazio U, allora per ogni $u \in U$ vale che $\{u_1, \dots, u_n, u\}$ è anch'esso un sistema di generatori di U.

Def: sia V uno spazio vettoriale e siano $v_1, \dots, v_n \in V$; gli elementi $v_1, \dots, v_n$ si dicono <u>linearmente dipendenti</u> se possiamo scrivere $0 \in V$ come una combinazione lineare di $v_1, \dots, v_n$ in cui non tutti i coefficienti in K sono nulli; ovvero se vale che

$$0 = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$$

con $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ non tutti nulli.

Prop: sia V uno spazio vettoriale su K e siano $v_1, \dots, v_n \in V$; allora $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente dipendenti se e solo se uno di essi può essere scritto come combinazione lineare degli altri (equivalentemente, se e solo se esiste $j \in \{1, \dots, n\}$ tale che $v_j \in \underbrace{\mathrm{span}(v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n)}$)

talvolta questo si può scrivere come $\mathrm{span}(v_1, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_n)$

Dim: "$\Longrightarrow$" supponiamo che $v_1, \dots, v_n$ siano linearmente dipendenti, allora

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$$

con $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ non tutti nulli; allora esiste $j \in \{1, \dots, n\}$ tale che $\lambda_j \neq 0$; allora vale che

$$-\lambda_j v_j = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{j-1} v_{j-1} + \lambda_{j+1} v_{j+1} + \dots + \lambda_n v_n$$

e quindi

$$v_j = \left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_j}\right) v_1 + \dots + \left(-\frac{\lambda_{j-1}}{\lambda_j}\right) v_{j-1} + \left(-\frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_j}\right) v_{j+1} + \dots + \left(-\frac{\lambda_n}{\lambda_j}\right) v_n$$

ovvero $v_j \in \mathrm{span}(v_1, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_n)$

"$\Longleftarrow$" supponiamo che esista un $j \in \{1, \dots, n\}$ tale che $v_j \in \mathrm{span}(v_1, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_n)$ allora $v_j = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_{j-1} v_{j-1} + \mu_{j+1} v_{j+1} + \dots + \mu_n v_n$

allora $\mu_1 v_1 + \dots + \mu_{j-1} v_{j-1} + v_j + \mu_{j+1} v_{j+1} + \dots + \mu_n v_n = 0$

e il coefficiente di v_j è 1, dunque è diverso da zero, pertanto $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente dipendenti.

Def: sia V uno spazio vettoriale su K, siano $v_1, \dots, v_n \in V$; diciamo che $v_1, \dots, v_n$ sono <u>linearmente indipendenti</u> se non sono linearmente dipendenti; equivalentemente, $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti se e solo se l'unico modo di scrivere 0 come combinazione lineare di $v_1, \dots, v_n$ è quello di usare tutti i coefficienti nulli; equivalentemente, $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti se, dal supporre che valga

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$$

discende che

$$\lambda_1 = 0, \dots, \lambda_n = 0.$$

Esempio: in $V = \mathbb{R}^2$ consideriamo

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

vale che $\{v_1, v_2, v_3\}$ sono linearmente dipendenti dal momento che $v_3 = v_1 + v_2$; invece vale che $\{v_1, v_2\}$ sono linearmente indipendenti visto che, se suppongo

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

allora vale che $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ il che implica $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 0$, quindi l'unico modo di scrivere il vettore nullo come combinazione lineare di v_1 e v_2 è quello di prendere entrambi i coefficienti uguali a zero.

Def: sia V uno spazio vettoriale su K e sia $U \subseteq V$ un sottospazio vettoriale; una <u>base</u> di U è un insieme $\{u_1, \dots, u_n\}$ di vettori di U tale che:

1. $\{u_1, \dots, u_n\}$ sono un sistema di generatori di U
2. $\{u_1, \dots, u_n\}$ sono linearmente indipendenti