ESERCIZI SU SISTEMI DI GENERATORI E INDIPENDENZA LINEARE
ALGEBRA LINEARE ED ELEMENTI DI GEOMETRIA
MATEMATICA PER L'ECONOMIA E LA STATISTICA 2
A.A. 2023/24

Esercizio 1

Considera i seguenti due vettori in $\mathbb{R}^2$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Dimostra che il vettore $v_3 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ è combinazione lineare di v_1 e v_2 determinando $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $v_3 = a \cdot v_1 + b \cdot v_2$.

Considera poi i vettori

$$v_1' = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad v_2' = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Dimostra che il vettore $v_3 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ è combinazione lineare di v_1' e v_2' determinando $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $v_3 = a \cdot v_1' + b \cdot v_2'$.

Esercizio 2

Sia $U \subseteq \mathbb{Q}^3$ il sottospazio vettoriale dato da

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^3 \mid 3x - y + 2z = 0 \right\}.$$

Determina un sistema di generatori per U.

Sia $U \subseteq \mathbb{Q}^4$ il sottospazio vettoriale dato da

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^4 \mid \begin{cases} 3x - y + 2z = 0 \\ 2y + z - w = 0 \end{cases} \right\}.$$

Determina un sistema di generatori per U.

Esercizio 3

Sia V uno spazio vettoriale su un campo K. Siano $v_1, \ldots, v_n \in V$ e sia v una combinazione lineare di $v_1, \ldots, v_n$. **Dimostra** che

$$\operatorname{span}(v_1, \ldots, v_n) = \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_n, v).$$

Esercizio 4

Sia V uno spazio vettoriale su un campo K. **Dimostra** che

(1) se $U \subseteq V$ è un sottospazio vettoriale e $\{u_1, \dots, u_n\}$ è un sistema di generatori per U, allora per ogni $u \in U$, anche $\{u_1, \dots, u_n, u\}$ è un sistema di generatori per U;
(2) se $v_1, \dots, v_n \in V$ sono linearmente indipendenti, allora per ogni $m \leq n$ anche $v_1, \dots, v_m$ sono linearmente indipendenti.

Esercizio 5

Sia $A \in M_{m,n}(K)$ una matrice a scala, dove K è un campo. Supponi che A sia diversa dalla matrice nulla. Siano $A_{(1)}, \dots, A_{(m)}$ le righe di A: esse sono dunque vettori in K^n. Siano $A_{(1)}, \dots, A_{(r)}$ le righe non-nulle di A, per un certo $r \leq m$ con $r > 0$. **Dimostra** che $A_{(1)}, \dots, A_{(r)}$ sono linearmente indipendenti.