Geometria 3 – Topologia

Foglio di esercizi 6

Giustificare adeguatamente le risposte.

1) Dimostrare che un'unione topologica di spazi compatti è compatta se e solo se è un'unione finita.

2) Supponiamo che X sia unione di sottospazi a due a due disgiunti $X_i \subset X$, $i \in I$. Dimostrare che X è unione topologica degli X_i se e solo se X_i è aperto in X, $\forall\, i \in I$.

3) Sia X uno spazio topologico e I un insieme. Dimostrare che $\bigsqcup_{i\in I} X = X \times I_{\mathrm{dis}}$.

4) Consideriamo spazi metrici $(X_1, d_1), \dots, (X_n, d_n)$. Dimostrare che la famiglia dei prodotti di bocce aperte dello stesso raggio

$$\mathcal{B} = \{B_{d_1}(x_1, r) \times \cdots \times B_{d_n}(x_n, r) \mid x_i \in X_i \ \forall\, i \text{ e } r > 0\}$$

è base per la topologia prodotto (senza usare la distanza sul prodotto).

5) Consideriamo $A \subset X$, con X spazio topologico. Dimostrare che $\mathrm{Int}_X A = \varnothing$ se e solo se $X - A$ è denso in X.

6) Sia $f \in R[x_1, \dots, x_n]$ un polinomio. Supponiamo che esista un aperto non vuoto $U \subset R^n$ t.c. f si annulli su U, ossia $f(x) = 0$, $\forall\, x \in U$. Dimostrare che $f = 0$.[1]

7) Consideriamo lo spazio delle matrici quadrate $M_n(R)$ con la topologia Euclidea. Dimostrare che:
   (a) $\mathrm{GL}_n(R)$ è aperto denso in $M_n(R)$.
   (b) $\mathrm{SL}_n(R)$ è chiuso non compatto in $M_n(R)$.
   (c) $\mathrm{O}(n)$ e $\mathrm{SO}(n)$ sono compatti.

8) Consideriamo lo spazio delle matrici quadrate $M_n(C)$ con la topologia Euclidea. Dimostrare che:
   (a) $\mathrm{GL}_n(C)$ è aperto in $M_n(C)$.
   (b) $\mathrm{SL}_n(C)$ è chiuso non compatto in $M_n(C)$.
   (c) $\mathrm{U}(n)$ e $\mathrm{SU}(n)$ sono compatti.

9) Dimostrare che $\mathrm{SO}(n)$ si immerge in $\underbrace{S^{n-1} \times \cdots \times S^{n-1}}_{n-1 \text{ volte}}$.

[1] Suggerimento: considerare le derivate parziali.