Prodotti topologici arbitrari

Prodotti arbitrari di insiemi. Dati gli insiemi $X_1, \dots, X_n$, una n-upla

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \cdots \times X_n$$

è essenzialmente una funzione

$$\begin{aligned} &x \colon \{1, \dots, n\} \to X_1 \cup \cdots \cup X_n \\ &\text{t.c.} \quad x(i) = x_i \in X_i, \quad \forall\, i \in \{1, \dots, n\} \end{aligned}$$

e quindi il prodotto cartesiano è l'insieme di tutte le funzioni di questo tipo. Questa considerazione ci permette di generalizzare il prodotto cartesiano.

Def. Data una famiglia $\{X_i\}_{i \in I}$ di insiemi, il *prodotto cartesiano* è l'insieme

$$\prod_{i \in I} X_i \overset{\text{def}}{=} \left\{ x : I \to \bigcup_{i \in I} X_i \;\middle|\; x(i) \in X_i, \forall\, i \in I \right\}.$$

$\forall\, x \in \prod\limits_{i \in I} X_i$, $\forall\, i \in I \rightsquigarrow x_i := x(i)$ (i*-esima componente di* x).

Scriviamo anche $x = (x_i)_{i \in I}$.

$\prod\limits_{n \in \mathbb{N}} X_n$ è l'insieme delle *successioni* $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ t.c. $x_n \in X_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

$\prod\limits_{i \in I} X = X^I$ è l'insieme delle funzioni $x \colon I \to X$.

$\prod\limits_{n \in \mathbb{N}} X = X^{\mathbb{N}}$ è l'insieme delle successioni a valori in X.

Prodotti topologici arbitrari. Il *prodotto topologico* di una famiglia di spazi $\{X_i\}_{i \in I}$ è il prodotto cartesiano $X = \prod\limits_{i \in I} X_i$ con la *topologia prodotto* avente per base la famiglia dei prodotti $U = \prod\limits_{i \in I} U_i$ t.c.

$U_i \subset X_i$ aperto $\forall\, i \in I$ e $\exists\, J \subset I$ sottoinsieme finito t.c. $U_i = X_i$, $\forall\, i \in I - J$.

N. B. Se $\# I = \infty$, la base della topologia prodotto non è formata da tutti i prodotti di aperti ma solo dai prodotti di aperti quasi tutti banali, cioè $U_i = X_i$ per ogni $i \in I$ tranne al più che per un numero finito.

N. B. La famiglia di *tutti* i prodotti di aperti è base per la *topologia box* che non studieremo. La topologia box è diversa dalla topologia prodotto nel caso di prodotti infiniti. Le due topologie coincidono per prodotti finiti.

Esempio. In $\mathbf{R}^{\mathbb{N}} = \prod\limits_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{R}$ gli aperti basici sono i prodotti del tipo $U = \prod\limits_{n \in \mathbb{N}} U_n$ con $U_n \subset \mathbf{R}$ aperto $\forall\, n \in \mathbb{N}$ e $\exists N > 0$ t.c. $U_n = \mathbf{R}$ $\forall\, n \geqslant N$.

Esempio. $[0, 1]^{\mathbb{N}} = \prod\limits_{n \in \mathbb{N}} [0, 1]$ è detto *cubo di Hilbert.*

Definiamo le *proiezioni canoniche*, $\forall\, j \in I$

$$\pi_j : \prod_{i\in I} X_i \to X_j$$
$$\pi_j(x) = x_j, \quad \forall\, x = (x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i.$$

Oss. π_j continua, suriettiva e aperta $\forall\, j \in I$.

$\pi_j^{-1}(U_j) = \prod_{i\in I} U_i$, $\forall\, U_j \subset X_j$, con $U_i = \begin{cases} U_j, & i = j \\ X_i, & i \neq j. \end{cases}$

$\pi_j\left(\prod_{i\in I} U_i\right) = U_j$.

Teor. *$f : Y \to \prod_{i\in I} X_i$ continua $\Leftrightarrow$ $f_j := \pi_j \circ f : Y \to X_j$ continua $\forall\, j \in I$.*

Def. $f_j = \pi_j \circ f : Y \to X_j$ è detta *j-esima componente* di f.

Oss. Si ha $f(y) = (f_i(y))_{i\in I}$ e scriviamo $f = (f_i)_{i\in I}$.

Dim. $\boxed{\Rightarrow}$ f_j è composizione di applicazioni continue quindi è continua.

$\boxed{\Leftarrow}$ $\forall \prod_{i\in I} U_i \subset \prod_{i\in I} X_i$ aperto basico $\exists\, J \subset I$ finito t.c. $U_i = X_i$ $\forall i \in I - J \Rightarrow$

$$f^{-1}\left(\prod_{i\in I} U_i\right) = \bigcap_{i\in I} f_i^{-1}(U_i) = \bigcap_{i\in J} f_i^{-1}(U_i) \quad \text{(intersezione finita di aperti).} \quad \square$$

Enunciamo senza dimostrazione il seguente teorema di compattezza per prodotti arbitrari di spazi compatti.

Teorema di Tychonoff. *$\{X_i\}_{i\in I}$ spazi compatti $\Rightarrow \prod_{i\in I} X_i$ compatto.*

Esempio. Il cubo di Hilbert $[0,1]^{\mathbb{N}}$ è compatto.

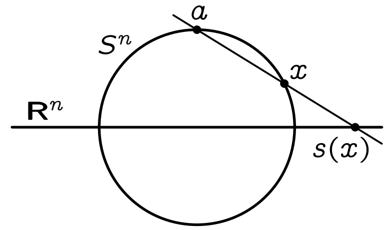
Proiezione stereografica

$a = (0, \dots, 0, 1) \in S^n \subset \mathbf{R}^{n+1}$
$\mathbf{R}^n \subset \mathbf{R}^{n+1}$ identificato con l'iperpiano di equazione $x_{n+1} = 0$.

$\forall\, x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n - \{a\}$ poniamo $s(x) = \overline{ax} \cap \mathbf{R}^n$, intersezione della retta $\overline{ax}$ con $\mathbf{R}^n$. Si ottiene la formula seguente per $s(x)$.

Def. L'applicazione

$$s : S^n - \{a\} \to \mathbf{R}^n$$
$$s(x_1, \dots, x_{n+1}) = \frac{(x_1, \dots, x_n)}{1 - x_{n+1}}$$

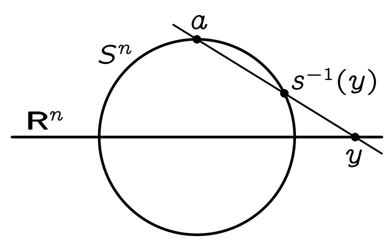


è detta *proiezione stereografica dal punto a*.

Quindi s è continua e con alcuni calcoli lasciati per esercizio si determina l'applicazione inversa, anch'essa continua.

Prop. *La proiezione stereografica è un omeomorfismo con inversa*

$$s^{-1} : \mathbf{R}^n \to S^n - \{a\}$$
$$s^{-1}(y) = \frac{(2y, \|y\|^2 - 1)}{\|y\|^2 + 1}$$



$\forall\, y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^n$.

Oss. Abbiamo stabilito che $\mathbf{R}^n \cong S^n - \{a\}$.

Oss. $s^{-1}(\mathbf{R}^n) = S^n - \{a\}$ aperto denso in S^n.

Oss. $s(0, \dots, 0, -1) = 0$.

Oss. Più in generale si può considerare la proiezione stereografica da un punto qualunque $u \in S^n$ verso l'iperpiano ortogonale $u^\perp \cong \mathbf{R}^n$ in $\mathbf{R}^{n+1}$.

Idea euristica.

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to a} s(x) &= \infty \\ \lim_{y \to \infty} s^{-1}(y) &= a \end{aligned}\right\} \overset{\text{Idea}}{\rightsquigarrow} \quad a \in S^n \text{ “corrisponde al punto all'infinito” di } \mathbf{R}^n.$$

Applicazioni proprie

Def. $f : X \to Y$ è *propria* se $\forall\, K \subset Y$ compatto $\Rightarrow f^{-1}(K) \subset X$ compatto.

Oss. In altre parole $f : X \to Y$ è propria se la preimmagine di qualunque compatto è compatta.

Oss. $f : X \to Y$ continua con X compatto e Y di Hausdorff $\Rightarrow f$ propria.

Oss. $f : X \to Y$ omeomorfismo $\Rightarrow f$ propria.