6 Novembre

Teor $f: I \xrightarrow{f} J \xrightarrow{g} \mathbb{R}$, $\quad$ $g \circ f$, $\quad x_0 \in I$, $y_0 \in J$, $\quad y_0 = f(x_0)$,

$\exists\, f'(x_0),\ g'(y_0)$. Allora

$$(g\circ f)'(x_0) = \big(g(f(x))\big)'(x_0) = g'(y_0)\, f'(x_0) \quad (1)$$

Dim Vogliamo

$$g(f(x)) - g(f(x_0)) = g'(y_0) f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0) \quad (2)$$

perché questa formula (2) è equivalente alla (1)

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)$$

$$g(y) - g(y_0) = g'(y_0)(y-y_0) + o(y-y_0)$$

$$g(\underbrace{f(x)}_{y}) - g(\underbrace{f(x_0)}_{y_0}) = g'(y_0)(y-y_0) + o(y-y_0) =$$

$$= g'(y_0)\big(f(x)-f(x_0)\big) + o\big(f(x)-f(x_0)\big)$$

$$= g'(y_0) f'(x_0)(x-x_0) + \boxed{g'(y_0)\, o(x-x_0) + o\big(f(x)-f(x_0)\big)}$$

$*$ Verifichiamo ora che $\overset{*}{=} o(x-x_0)$

Ci resta da dimostrare $*$, cioè

$$\lim_{x\to x_0} \frac{g'(y_0)\, o(x-x_0) + o\big(f(x)-f(x_0)\big)}{x-x_0} = 0 \quad (3)$$

Verifico che

$$\lim_{x\to x_0} g'(y_0) \frac{o(x-x_0)}{x-x_0} = g'(y_0)\, 0 = 0$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{o\big(f(x)-f(x_0)\big)}{x-x_0} = 0$$

Supponiamo $f'(x_0) \neq 0$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{o\big(f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)\big)}{x-x_0} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{o\left((x-x_0)\left(f'(x_0) + \frac{o(x-x_0)}{x-x_0}\right)\right)}{x-x_0}$$

$$= \lim_{x\to x_0} \left(\frac{o\big((x-x_0)(f'(x_0)+o(1))\big)}{(x-x_0)\big(f'(x_0)+o(1)\big)}\right) \big(f'(x_0)+o(1)\big)$$

$$= f'(x_0)\quad 0 = 0$$

Abbiamo dimostrato che

$$\lim_{x\to x_0} \frac{o\big(f(x)-f(x_0)\big)}{x-x_0} = 0 \quad (\text{se } f'(x_0)\neq 0)$$

Esempi

$$\Big(\lg\big(\overbrace{\sqrt{1+x^2+x} + 1}^{f(x)}\big)\Big)' =$$

$$= \lg'\big(\sqrt{1+x^2+x}+1\big) \quad \big(\sqrt{1+x^2+x} + 1\big)'$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+x^2+x}+1} \quad \Big(\big((1+x^2+x)^{\frac12}\big)' + \underbrace{(1)'}_{=0}\Big)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+x^2+x}+1} \quad \Big((1+x^2+x)^{\frac12}\Big)'$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+x^2+x}+1} \quad \frac12 (1+x^2+x)^{-\frac12} \quad (1+x^2+x)'$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+x^2+x}+1} \quad \frac12 (1+x^2+x)^{-\frac12} \quad (2x+1)$$

$$\left(e^{f(x)}\right)' = e^{f(x)} \, f'(x)$$

$$\left(g(f(x))\right)' = g'(f(x)) \, f'(x) = e^{\cancel{y} f(x)} f'(x)$$

$$g(y) = e^y$$

$$g'(y) = e^y$$

$$\left(\lg f(x)\right)' = \frac{1}{f(x)} \, f'(x)$$

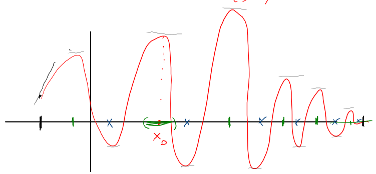
$$g(f(x)) \qquad g(y) = \lg y \qquad g'(y) = \frac{1}{y}$$

$$\left(g(f(x))\right)' = g'(f(x)) \, f'(x) = \frac{1}{f(x)} \, f'(x)$$

Def (Punti critici) Sia $f: I \to \mathbb{R}$. Un punto critico di f è un punto $x_0 \in \mathring{I}$ t.c. $f'(x_0) = 0$.

Def Sia $f: I \to \mathbb{R}$. Un punto $x_0 \in I$ si dice un punto di massimo (minimo) locale se $\exists\ \delta > 0$ t.c.

per $x \in I$ e $|x - x_0| \leq \delta \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$ $(\geq)$



Teor (Fermat) Sia $f: I \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathring{I}$. Se x_0 è un punto di estremo locale per f e se esiste $f'(x_0)$ allora $f'(x_0) = 0$.

Dim Supponiamo che x_0 sia un punto di massimo locale

$\Rightarrow \exists\ \delta_0 > 0$ t.c. $x \in [x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0] \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$

$\Rightarrow f(x) - f(x_0) \leq 0$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Esaminiamo $\displaystyle\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Sappiamo che per $x_0 < x \leq x_0 + \delta_0$ risulta che

$$\frac{\overbrace{f(x) - f(x_0)}^{\leq 0}}{\underbrace{x - x_0}_{> 0}} \leq 0 \Rightarrow f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

Abbiamo ricavato che $f'(x_0) \leq 0$

Esaminiamo $\displaystyle\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

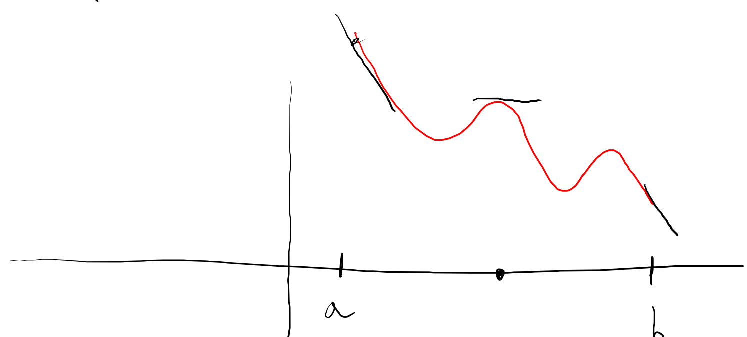
Supponiamo che per $x_0 - \delta_0 \le x < x_0$

$$\frac{\overbrace{f(x)-f(x_0)}^{\le 0}}{\underbrace{x-x_0}_{<0}} \geq 0 \implies f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$$

$$\implies \boxed{f'(x_0) \geq 0}$$

Siccome valgono entrambe $f'(x_0) \le 0$ e $f'(x_0) \geq 0$

$\implies f'(x_0) = 0$.



Esempio $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x \qquad x \in [0,4]$

Cerchiamo punti di massimo e minimo assoluto.

Gli estremi sono dei candidati.

$f(0) = 0$

$f(4) = 32$

$f'(x) = 6x^2 - 30x + 36 = 6(x^2 - 5x + 6) = 0$

$x^2 - 5x + 6 = 0 \qquad x = 2, 3 \in [0,4]$

$(x-2)(x-3)$

Solo i punti in $\{0, 2, 3, 4\}$ possono essere punti di massimo/minimo assoluto.

$f(2) = 28$, $f(3) = 27$

$f(0) = 0$, $f(4) = 32$

0 è il punto di minimo assoluto

4 max

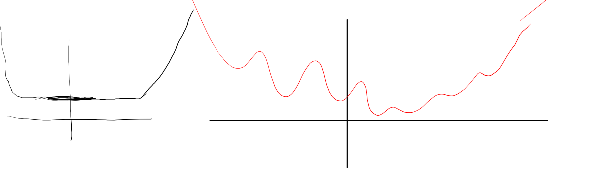
Esempio Dimostrare che vale

$$1+x \le e^x \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Consideriamo $f(x) = e^x - x - 1$ e dimostriamo che $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Notare che $f \in C^0(\mathbb{R})$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (e^x - x - 1) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (e^x - x - 1) = 0 + \infty - 1 = +\infty$$



f ha almeno un punto di minimo assoluto che, da Fermat, è un punto critico.

$$f'(x) = (e^x - x - 1)' = e^x - 1 = 0$$

$$e^x = 1 \qquad x = \lg 1 = 0$$

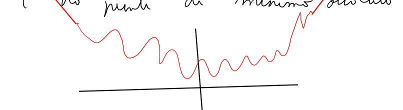
0 è l'unico punto critico. Allora 0 è l'unico punto di minimo assoluto

$$f(x) = e^x - x - 1 \qquad f(0) = 0$$

Pertanto $e^x > x + 1 \quad \forall x \neq 0$.

Esercizio Sia $f \in C^0(\mathbb{R})$ t.c. $\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$.

Dimostrare che f ha punti di minimo assoluto.



5.5.8 $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = (1-x) \arcsin x \in C^0([-1,1])$$

$$f(1) = 0$$

$$f(-1) = 2 \arcsin(-1) = 2\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\pi$$

$$f'(x) = (1-x)' \arcsin(x) + (1-x)(\arcsin x)'$$

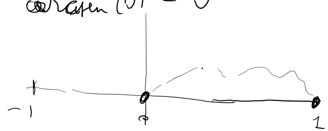
$$= -\arcsin(x) + (1-x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= -\arcsin x + \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

$x = 1$ è un punto di minimo locale perché

$f(x) = (1-x) \arcsin x > 0$ se $0 < x < 1$

$f(0) = 1 \arcsin(0) = 0$



Siccome $f(0) = f(1) = 0$ ed $f(x) > 0$ per $0 < x < 1$

vuole dire che almeno un punto di massimo locale in $(0, 1)$