Compattificazione di Alexandrov

Def. Una *compattificazione* di uno spazio non compatto X è un'immersione di X come sottospazio denso di uno spazio compatto Y.

Teorema di Alexandrov. *X spazio topologico T_2 localmente compatto non compatto $\Rightarrow \exists\, \widehat{X} = X \cup \{\infty\}$ compattificazione T_2 di X, con $\infty \notin X$. Inoltre $\widehat{X}$ è unico a meno di omeomorfismi.*

Def. $\widehat{X}$ è detto *compattificazione di Alexandrov* o *compattificazione con un punto* di X. ∞ è il *punto all'infinito di X* e lo indicheremo anche ∞_X.

Dim. Poniamo $\widehat{X} := X \cup \{\infty\}$, dove ∞ indica un punto t.c. $\infty \notin X$.

<u>*Topologia di $\widehat{X}$*</u>. $U \subset \widehat{X}$ aperto $\overset{\text{def}}{\iff} \begin{cases} (a)\ U \subset X \text{ aperto in } X, & \infty \notin U \\ (b)\ X - U \subset X \text{ compatto}, & \infty \in U \end{cases}$

Gli aperti di $\widehat{X}$ sono gli aperti di X e i complementari dei compatti di X. Verifichiamo che è una topologia.

(1) $\emptyset$ e $\widehat{X}$ aperti rispettivamente (a) e (b).

(2) $\forall \{U_i\}_{i\in I}$ famiglia di aperti di $\widehat{X} \rightsquigarrow U = \bigcup\limits_{i\in I} U_i = \underset{\cup(a)}{U_0} \cup \underset{\cup(b)}{U_\infty}$.

$\quad I_\infty := \{i \in I \mid \infty \in U_i\} \underset{X \text{ è } T_2}{\rightsquigarrow} K_i = \widehat{X} - U_i \subset X$ compatto $\forall\, i \in I_\infty$

$\quad K := \bigcap\limits_{i\in I_\infty} K_i \subset K_j \subset X$ chiuso $\Rightarrow K$ compatto

$\quad U_\infty = \bigcup\limits_{i\in I_\infty} (\widehat{X} - K_i) = \widehat{X} - \bigcap\limits_{i\in I_\infty} K_i = \widehat{X} - K$ aperto (b).

$\quad I_\infty = \emptyset \Rightarrow U = U_0 \subset X$ aperto (a).

$\quad I_\infty \neq \emptyset \Rightarrow X - U = \underbrace{(X - U_0)}_{\text{chiuso in } X} \cap \underbrace{(X - U_\infty)}_{K \text{ compatto}} \subset X \Rightarrow U$ aperto (b).

(3) $\forall\, U, V \subset \widehat{X}$ aperti. Entrambi $(a) \Rightarrow U \cap V$ aperto (a).

$\quad U$ tipo (a) e V tipo $(b) \Rightarrow K := X - V \subset X$ compatto e
$\quad V_0 := X \cap V = X - K$ aperto in $X \Rightarrow U \cap V = U \cap V_0$ aperto (a).

$\quad$ Entrambi $(b) \Rightarrow X - (U \cap V) = \underbrace{(X - U)}_{\text{compatto}} \cup \underbrace{(X - V)}_{\text{compatto}} \Rightarrow U \cap V$ ap. (b).

<u>*$\widehat{X}$ compatto*</u>. $\forall \{U_i\}_{i\in I}$ ricoprimento aperto di $\widehat{X} \Rightarrow \exists\, i_\infty \in I$ t.c. $\infty \in U_{i_\infty}$

$\rightsquigarrow K := X - U_{i_\infty} \subset X$ compatto $\rightsquigarrow K \subset U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n} \Rightarrow$
$\{U_{i_1}, \ldots, U_{i_n}, U_{i_\infty}\}$ sottoricoprimento finito.

<u>*X denso in $\widehat{X}$*</u>. $\forall\, \emptyset \neq U \subset \widehat{X}$ aperto. U tipo $(a) \Rightarrow U \cap X = U \neq \emptyset$.

U tipo $(b) \rightsquigarrow \underset{\text{cpt}}{K} := X - U \subsetneq \underset{\substack{\text{non}\\\text{cpt}}}{X} \Rightarrow \exists\, x \in X - K \Rightarrow x \in U \cap X \neq \emptyset$.

_T_2_. $\forall\, x \neq y \in \widehat{X}$. $x, y \in X \Rightarrow \exists\, U, V$ aperti (a) t.c. $x \in U$, $y \in V$, $U \cap Y = \emptyset$.
$x \in X$ e $y = \infty \Rightarrow \exists\, W \underset{\substack{\text{loc.}\\ \text{cpt}}}{\subset X}$ intorno compatto di $x \rightsquigarrow$
$U := \mathrm{Int}_X W$, $V := \widehat{X} - W$ aperti in $\widehat{X}$ t.c. $x \in U$, $\infty \in V$ e $U \cap V = \emptyset$.
Unicità. $\widehat{X}' = X \cup \{\infty'\}$, $\infty' \notin X$, altra compattificazione T_2 di $X \rightsquigarrow$

$$g : \widehat{X} \to \widehat{X}', \quad g(x) = \begin{cases} x, & x \neq \infty \\ \infty', & x = \infty \end{cases}$$

$\forall\, V \subset \widehat{X}'$ aperto. $\infty' \notin V \Rightarrow V \subset X \Rightarrow g^{-1}(V) = V$ aperto (a).
$\infty' \in V \Rightarrow K = \widehat{X}' - V \subset X$ compatto $\Rightarrow g^{-1}(V) = \widehat{X} - K$ aperto (b).
g continua e biiettiva, $\widehat{X}$ compatto, $\widehat{X}'$ $T_2 \Rightarrow g$ omeomorfismo. □

Oss. $X \subset \widehat{X}$ aperto denso.

Teor. _X, Y spazi T_2 loc. compatti non compatti, $f : X \to Y$ continua e propria $\Rightarrow \hat{f} : \widehat{X} \to \widehat{Y}$ estensione di f t.c. $f(\infty_X) = \infty_Y$ continua._

Dim. $\hat{f} : \widehat{X} \to \widehat{Y}, \quad \hat{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq \infty_X \\ \infty_Y & x = \infty_X \end{cases}$

$\forall\, V \subset \widehat{Y}$ aperto. $V \subset Y \Rightarrow \hat{f}^{-1}(V) = f^{-1}(V) \subset X$ aperto (a).
V aperto (b) $\Rightarrow K := \widehat{Y} - V = Y - V \subset Y$ compatto $\overset{\text{propria}}{\Longrightarrow}$
$\hat{f}^{-1}(K) = f^{-1}(K) \subset X$ compatto $\Rightarrow \hat{f}^{-1}(V) = \widehat{X} - f^{-1}(K)$ aperto (b). □

Cor. _$f : X \to Y$ omeomorfismo $\Rightarrow \hat{f} : \widehat{X} \to \widehat{Y}$ omeomorfismo._

Cor. _X compatto T_2, $a \in X$ t.c. $X_0 = X - \{a\}$ non compatto $\Rightarrow \widehat{X}_0 = X$._

Cor. $\widehat{\mathbf{R}}^n \cong S^n$, $\forall\, n \geqslant 1$.

Dim. Proiezione stereografica $\rightsquigarrow \mathbf{R}^n \cong S^n - \{(0, \ldots, 0, 1)\}$. □

Oss. $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continua.
$\lim_{x\to\infty} f(x) = a \in \mathbf{R} \Leftrightarrow \exists\, \tilde{f} : \widehat{\mathbf{R}} \to \mathbf{R}$ estensione continua di f t.c. $\tilde{f}(\infty) = a$.
$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow f$ propria $\rightsquigarrow \hat{f} : \widehat{\mathbf{R}} \to \widehat{\mathbf{R}}$, $\hat{f}(\infty) = \infty$.