EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Osservazione preliminare

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo. Allora l'insieme

$C^k(I, \mathbb{R}^n) = \{ u : I \to \mathbb{R}^n \text{ di classe } C^k \}$ è uno spazio vettoriale con le operazioni

$$(u+v)(t) := u(t) + v(t) \qquad t \in I$$
$$(\alpha u)(t) = \alpha u(t) \qquad t \in I$$

dove $u, v \in C^k(I, \mathbb{R}^n)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

Un'equazione differenziale è un'equazione in cui l'incognita è una funzione $u : I \to \mathbb{R}^n$.

$$F(t, u(t), u'(t), u''(t), \dots, u^{(k)}(t)) = 0 \quad \forall t$$

dove $F : \mathbb{R} \times \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{k} \to \mathbb{R}^m$ è regolare.

L'esempio più semplice di equazione differenziale è la ricerca delle primitive:

$$u'(t) = f(t)$$

in questo caso $F(t, u, u') = u' - f(t)$.

La totalità delle soluzioni è

$$u(t) = \int_0^t f(s)\,ds + C \qquad C \in \mathbb{R}$$

(11.6)

Noi ci occuperemo di alcune classi particolari di equazioni differenziali in forma esplicita:

•) Equazioni di ordine 1 lineari (scalari)

$u'(t) + a(t)u(t) = b(t)$

con $a, b \in C^0(I)$

•) Equazioni non lineari di ordine 1 a variabili separate (scalari)

$u'(t) = g(t)\, f(u(t))$

con g, f continue

•) Equazioni lineari di ordine 2 (scalari)

$u''(t) + a(t)u'(t) + b(t)u(t) = c(t)$

in particolare con i coefficienti costanti $a, b \in \mathbb{R}$.

<u>Equazioni lineari di ordine 1</u>

$(*)\quad u' + a(t)u = b(t) \qquad a, b : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Vediamo quali possono essere le soluzioni.

Sia $A(t)$ una primitiva di $a(t)$.

Sia $u(t)$ una soluzione di $(*)$.

moltiplichiamo l'equazione per $e^{A(t)}$ ottenendo

$$u'(t)e^{A(t)} + a(t)e^{A(t)}u(t) = b(t)e^{A(t)}$$

da cui

$$\frac{d}{dt}\left(e^{A(t)}u(t)\right) = e^{A(t)}b(t).$$

Sia $t_0 \in I$. Allora, integrando tra t_0 e t,

$$e^{A(t)}u(t) - e^{A(t_0)}u(t_0) = \int_{t_0}^{t} e^{A(s)}b(s)\,ds$$

da cui

$$u(t) = e^{-(A(t)-A(t_0))}u(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{-(A(t)-A(s))}b(s)\,ds$$

Viceversa, dato $u_0 \in \mathbb{R}$ e $t_0 \in I$, definendo

$$u(t) := e^{-(A(t)-A(t_0))}u_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-(A(t)-A(s))}b(s)\,ds$$

si ha che

$$u'(t) = -a(t)e^{-(A(t)-A(t_0))}u_0 - a(t)\int_{t_0}^{t} e^{-(A(t)-A(s))}b(s)\,ds + e^{-A(t)}e^{A(t)}b(t)$$

$$= -a(t)u(t) + b(t).$$

Abbiamo quindi completamente risolto il problema, cioè abbiamo trovato la totalità delle soluzioni di (*), ovvero

$$\left\{ u(t) = e^{-(A(t)-A(t_0))} u_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-(A(t)-A(s))} b(s)\,ds \;\middle|\; u_0 \in \mathbb{R} \right\}$$

Non solo: abbiamo anche risolto il cosiddetto <u>problema di Cauchy</u> associato a (*), ovvero

$$\begin{cases} u' + a(t)\,u = b(t) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

dove t_0 e u_0 sono assegnati.

Il problema di Cauchy consiste nel trovare una soluzione di (*) che soddisfi la "condizione iniziale" $u(t_0) = u_0$.

<u>Esempio</u>

$u' = t^3 - tu$

o equivalentemente

$u' + tu = t^3$

in questo caso $a(t) = t$, $b(t) = t^3$

una primitiva di $a(t)$ è $\frac{1}{2}t^2 = A(t)$.

fissato $t_0 \in \mathbb{R}$, $u_0 \in \mathbb{R}$, la soluzione del problema di Cauchy è

$$u(t) = e^{-\frac{1}{2}(t^2-t_0^2)} u_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-\frac{1}{2}(t^2-s^2)} s^3 \, ds$$

calcoliamo

$$\int e^{\frac{1}{2}s^2} s^3 \, ds = \int (s e^{\frac{1}{2}s^2}) s^2 \, ds$$
$$= e^{\frac{1}{2}s^2} s^2 - \int e^{\frac{1}{2}s^2} 2s \, ds$$
$$= e^{\frac{1}{2}s^2} s^2 - 2 e^{\frac{1}{2}s^2} + c$$

da cui

$$u(t) = e^{-\frac{1}{2}(t^2-t_0^2)} u_0 + e^{-\frac{1}{2}t^2} \left(t^2 e^{\frac{1}{2}t^2} - 2e^{\frac{1}{2}t^2} - t_0^2 e^{\frac{1}{2}t_0^2} + 2e^{\frac{1}{2}t_0^2} \right)$$
$$= e^{-\frac{1}{2}(t^2-t_0^2)} u_0 + (t^2-2) - (t_0^2-2) e^{-\frac{1}{2}(t^2-t_0^2)}$$

Applicazione

Decadimento radioattivo.

$m(t)$ = massa al tempo t di una sostanza radioattiva.

In un piccolo intervallo di tempo Δt si ha una perdita di massa radioattiva secondo la legge

$$m(t) - m(t+\Delta t) = K\, m(t)\, \Delta t$$

K costante caratteristica della sostanza.

segue che

$$\frac{m(t+\Delta t) - m(t)}{\Delta t} = -K\, m(t)$$

per $\Delta t \to 0$ otteniamo

$$m'(t) = -K\, m(t)$$

da cui

$$m(t) = e^{-K(t-t_0)}\, m(t_0)$$

scegliendo $t_0 = 0$,

$$m(t) = e^{-Kt}\, m(0)$$

Tempo di dimezzamento: Il tempo necessario perché la massa si dimezzi

$$\begin{cases} m(T) = \frac{1}{2} m(0) \\ = e^{-KT} m(0) \end{cases}$$

$$e^{-KT} = \frac{1}{2} \qquad KT = \log 2 \qquad T = \frac{\log 2}{K}$$

OSSERVAZIONE

Osserviamo attentamente l'equazione

$$u' + a(t)u = b(t) \quad (*)$$

e la sua soluzione generale

$$u(t) = \underbrace{e^{-(A(t)-A(t_0))}u_0}_{\text{risolve } u'+a(t)u=0} + \underbrace{\int_{t_0}^{t} e^{-(A(t)-A(s))} b(s)\,ds}_{\text{risolve } u'+a(t)u=b(t)}$$

quindi $u(t)$ è la somma di una soluzione di $u'+au=b$ fissata, e di una soluzione di $u'+au=0$ con parametro libero u_0 da determinare.

Questa osservazione ci suggerisce di provare a caratterizzare in modo più preciso l'insieme delle soluzioni di $(*)$

Consideriamo l'equazione omogenea

$$u' + a(t)u = 0. \quad (**)$$

Osserviamo che la somma di due soluzioni è ancora una soluzione, così come il prodotto tra un numero reale e una soluzione.

si ha cioè che l'insieme delle soluzioni dell'equazione omogenea (**) è uno spazio vettoriale.

Inoltre sappiamo che le soluzioni sono tutte della forma

$$e^{-(A(t)-A(t_0))}u_0$$

dove t_0 è fissato e u_0 è libero.

Abbiamo quindi che si tratta di uno spazio vettoriale di dimensione 1.

L'insieme delle soluzioni di (**) è quindi $\{A\varphi(t) \mid A \in \mathbb{R}\}$ dove $\{\varphi\}$ è una base dello spazio delle soluzioni di (**)

Osserviamo anche che se ψ risolve (*) e φ risolve (**) allora $\varphi+\psi$ risolve (**)

Inoltre se ψ_1 e ψ_2 risolvono (*), si ha che $\psi_1-\psi_2$ risolve (**).

Segue che

$$\{\text{soluzioni di } (*)\} = \{A\varphi+\psi \mid A \in \mathbb{R}\}$$

dove $\{\varphi\}$ è una base dello spazio delle soluzioni di (**) e ψ è una soluzione particolare di (*).

Equazioni scalari di ordine 1 a variabili separate

Si tratta di equazioni della forma

$$u'(t) = g(t)\, f(u(t)) \quad (\star)$$

o più in breve

$$u' = g(t)\, f(u)$$

L'ipotesi è che g e f siano continue.

Se $g(\bar u) = 0$ allora $u(t) \equiv \bar u$ è soluzione.

Consideriamo quindi il caso in cui

$g : \,]\alpha, \beta[\, \longrightarrow \mathbb{R}$ sia t.c. $g(u) \neq 0 \quad \forall\, u \in \,]\alpha, \beta[$.

Supponiamo che $u : \,]a, b[\, \longrightarrow \,]\alpha, \beta[$ sia una soluzione. Allora

$$u'(t) = g(t)\, f(u(t)) \,,$$

quindi

$$\frac{u'(t)}{f(u(t))} = g(t)$$

Sia ora $F : \,]\alpha, \beta[\, \to \mathbb{R}$ t.c. $F'(u) = \dfrac{1}{f(u)}$

allora

$\dfrac{d}{dt} F(u(t)) = g(t)$ e quindi

$$F(u(t)) = G(t) + c$$

dove $G'(t) = g(t)$.

Se ora F è invertibile, si ha

$$u(t) = F^{-1}(G(t)+C)$$

Viceversa, se definiamo $v(t) = F^{-1}(G(t)+C)$

allora $v'(t) = \frac{1}{F'(F^{-1}(G(t)+C))} g(t) = \frac{1}{\frac{1}{f(F^{-1}(G(t)+C))}} \cdot g(t)$

e quindi $v'(t) = f(v(t))g(t)$

cioè v risolve $(\star)$.

Se abbiamo un problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = g(t)f(u) \\ u(t_0) = u_0 \neq 0 \end{cases}$$

la costante C si determina in modo da soddisfare la condizione iniziale

$$F(u_0) = G(t_0) + C \longrightarrow C = F(u_0) - G(t_0)$$

Esempio

$$\begin{cases} u' = u^2 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$ in questo caso $g(t) \equiv 1$.

Risolviamo l'equazione $u' = u^2$

$\frac{1}{u^2} u' = 1$ $\qquad F(u) = -\frac{1}{u}$

$\qquad G(t) = t + C$

Allora la soluzione è

$$-\frac{1}{u(t)} = t + C$$

da cui $u(t) = -\frac{1}{t+C}$

Determiniamo C.

$$C = -\frac{1}{u_0}$$

quindi la soluzione è

$$u(t) = \frac{1}{\frac{1}{u_0} - t}$$

<u>N. B.</u> Si osservi che $\lim_{t \to \frac{1}{u_0}} u(t) = +\infty$.

Si dice che $u(t)$ "esplode in tempo finito".

<u>ESEMPIO</u>

$u' = e^{t-u}$ $\qquad e^u u' = e^t$

$F(u) = e^u \qquad G(t) = e^t$

$$\Rightarrow \quad e^{u(t)} = e^t + C$$

$$\Rightarrow \quad u(t) = \log(e^t + C)$$

Se abbiamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = e^{t-u} \\ u(t_0) = u_0 \end{cases},$$

determiniamo C.

$$e^{u_0} = e^{t_0} + C \longrightarrow C = e^{u_0} - e^{t_0}.$$

Allora la soluzione è

$$u(t) = \log(e^t + e^{u_0} - e^{t_0}).$$