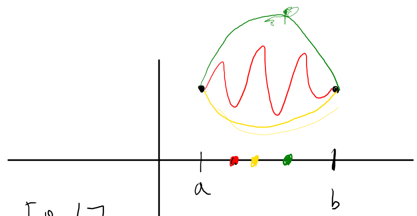
7 Novembre

<u>Teorema</u> (Rolle) Sia $f \in C^0([a,b])$, $a,b \in \mathbb{R}$ e supponiamo che esista $f'(x)$ $\forall x \in (a,b)$. Inoltre, supponiamo che $f(a) = f(b)$.
Allora $\exists\, c \in (a,b)$ t.c.

$$f'(c) = 0.$$



<u>Dim</u> Sappiamo per Weierstrass che f ammette in $[a,b]$ un valore massimo M ed un valore minimo m.

Se $m = M$ allora $f(x) = M$ dappertutto e $f'(x) = 0$ $\forall x \in (a,b)$

Supponiamo che $m < M$. Possiamo concludere che almeno uno tra m ed M è distinto da $f(a) = f(b)$
Non è restrittivo assumere che $M \neq f(a) = f(b)$

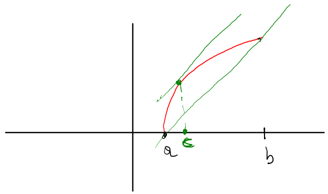
Supponiamo che $\exists\, x_M \in [a,b]$ t.c. $f(x_M) = M$.

Concludiamo che $x_M \neq a, b \Rightarrow x_M \in (a,b)$.

Cioè x_M è un punto di massimo assoluto e sappiamo $f'(x_M)$ esiste e che $x_M \in (a,b)$. Fermat implica che $f'(x_M) = 0$. Abbiamo trovato il c dell'enunciato

Teorema (Lagrange) Sia $f \in C^0([a,b])$ e tale che $f'(x)$ è definita $\forall\, x \in (a,b)$. Allora $\exists\, c \in (a,b)$ t.c.

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Osservazione. Nel caso particolare in cui $f(a) = f(b)$ si riottiene Rolle.

Dim Aggiustiamo la funzione, introducendo

$$g(x) = f(x) - A(x-a)$$

dove scelgo A in modo che $g(b) = g(a)$ $*$

$$g(a) = f(a)$$

$$g(b) = f(b) - A(b-a)$$. Impongo

$$f(b) - A(b-a) = f(a) \iff A = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

$g(x)$ soddisfa le ipotesi di Rolle e pertanto anche le conclusioni. Pertanto $\exists\, c \in (a,b)$ dove

$$g'(c) = 0$$

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$ Pertanto in c

$$0 = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$\square$

Significato geometrico del segno della derivata.

<u>Osservazione 1</u> Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ crescente e derivabile in (a,b). Allora dalla definizione della derivata si ricava che $f'(x)\geq 0$ $\forall x\in(a,b)$

Infatti se fissiamo $x\in(a,b)$ supponiamo che

$$f'(x)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Siccome f è crescente e, per $h>0$, ho $x<x+h$

$$\Longrightarrow f(x+h)-f(x)\geq 0 \Longrightarrow \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\geq 0$$

Per il teorema del confronto $f'(x)\geq 0$. $\forall x\in(a,b)$

In modo analogo, se $f(x)$ è decrescente, allora $f'(x)\leq 0$ $\forall x\in(a,b)$.

Corollario (di Lagrange) Sia $f \in C^0([a,b])$ f derivabile in (a,b). Allora

1) $\big(f$ è crescente in $[a,b]\big) \Longleftrightarrow$ se e solo se $\big(f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b)\big)$

2) f decrescente in $[a,b]$ se e solo se $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a,b)$.

Dim. Basta dimostrare la 1).

Assumiamo che f è crescente in $[a,b]$. Abbiamo appena dimostrato che ciò implica che $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in (a,b)$.

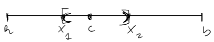
Assumiamo ora che $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b)$ e dimostriamo che $f(x)$ è crescente in $[a,b]$ cioè che

$\forall \quad a \leq x_1 < x_2 \leq b \quad$ si ha $\quad f(x_1) \leq f(x_2)$

Consideriamo l'intervallo $[x_1, x_2]$

$f \in C^0([a,b]) \Longrightarrow f \in C^0([x_1,x_2])$

$x \in (x_1,x_2) \Longrightarrow x \in (a,b) \Longrightarrow f'(x)$ esiste $\forall x \in (x_1,x_2)$



Applico Lagrange: $\exists \ c \in (x_1,x_2)$ t.c. $f'(c) = \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$

Siccome $f'(c) \geq 0 \Longrightarrow \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{\underbrace{x_2-x_1}_{>0}} \geq 0$

$\Longrightarrow f(x_2)-f(x_1) \geq 0 \Longrightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$

Abbiamo dimostrato che se $x_1 \leq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ cioè che f è crescente.

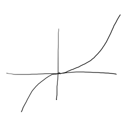
Osservazione La dimostrazione mostra che se $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a,b)$ allora $f(x)$ è strettamente crescente

Osservazione Se f è strettamente crescente in un intervallo (a,b) ed è derivabile in (a,b) non è detto che $f'(x) > 0 \ \forall x \in (a,b)$.

Esempio $f(x) = x^3$ in $\mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 \geq 0$

$f'(0) = 0$



<u>Corollario</u> (di Lagrange) Sia $f \in C^0([a,b])$, $f'(x)$ esiste $\forall x \in (a,b)$. Allora

$$f \text{ è costante in } [a,b] \iff f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b)$$

Dim

Se f è costante in $[a,b] \implies f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b)$

Se $f'(x) = 0 \ \forall x \in (a,b) \implies f'(x) \geq 0 \ \forall x \in (a,b) \implies f$ crescente in $[a,b]$

$f'(x) = 0 \ \forall x \in (a,b) \implies f'(x) \leq 0 \ \forall x \in (a,b) \implies f$ decrescente in $[a,b]$

Siccome f è sia una funzione crescente che una funzione decrescente in $[a,b]$, necessariamente $f(x) = c \quad \forall x \in [a,b]$ per una certa c.

Definizione (Derivata seconda) Sia $f:(a,b) \to \mathbb{R}$. Supponiamo $f'(x)$ esista $\forall x \in (a,b)$. Resta definita una nuova funzione $f': (a,b) \to \mathbb{R}$. Supponiamo che in un punto $x_0 \in (a,b)$ esista finito $(f')'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$

Allora chiamiamo $(f')'(x_0)$ derivata seconda di f nel punto x_0 e denotiamo

$$(f')'(x_0) = f''(x_0) = f^{(2)}(x_0) = \frac{d^2 f}{dx^2}(x_0)$$

$$= \left(\frac{d}{dx}\right)^2 f \quad (x_0)$$

Osservazione Nel seguito $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$

Def (Derivata di ordine n) Sia $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ e supponiamo per induzione di avere definito $f^{(n-1)}$ e supponiamo che $f^{(n-1)}(x)$ sia definita $\forall x \in (a,b)$.

Se in un punto x_0 $\exists$ $\left(f^{(n-1)}\right)'(x_0)$ la chiameremo derivata n-esima di f nel punto x_0 con

$$\left(f^{(n-1)}\right)'(x_0) \doteq f^{(n)}(x_0) = \frac{d^n}{dx^n} f(x_0) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n f(x_0).$$

$$f(x) = \operatorname{sen}(x)$$

$$f^{(0)}(x) = \operatorname{sen}(x)$$

$$f^{(1)}(x) = (\sin(x))' = \cos x$$

$$f^{(2)}(x) = (\cos x)' = -\sin x$$

$$f^{(3)}(x) = (-\sin x)' = -\cos x$$

$$f^{(4)}(x) = (-\cos x)' = \sin x$$

$$f^{(5)}(x) = (\sin x)' = \cos x$$

$$f^{(6)}(x) = (\cos x)' = -\sin x$$

$$f^{(7)}(x) = (-\sin x)' = -\cos x$$

$$f^{(8)}(x) = \sin x$$

In generale per $n \in \mathbb{N}$ $\quad n = 4q + r \quad r \in \{0, 1, 2, 3\}$

$$\operatorname{sen}^{(n)}(x) = \sin^{(r)}(x)$$

$$\sin^{(n)}(x) = \sin^{(4q+r)}(x) = \left(\sin^{(4q)}(x)\right)^{(r)} =$$

$$= (\operatorname{sen} x)^{(r)}$$

$$\operatorname{sen}^{(n)}(0) = ?$$

$$\operatorname{sen}^{(2m)}(0) = 0 \qquad \sin^{(2m)}(x) = (-1)^m \operatorname{sen}(x)$$

$$\sin^{(2m+1)}(0) = (-1)^m$$