Basi di spazi vettoriali e dimensione

Def.: sia V uno spazio vettoriale su K; se esiste un sistema di generatori $\{v_1, \dots, v_n\}$ finito di V, allora V si dice *finitamente generato*.

Teor.: sia V uno spazio vettoriale su K finitamente generato; un sottoinsieme $B \subseteq V$, $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di V se e solo se ogni $v \in V$ si può scrivere in modo unico come combinazione lineare di B.

Dim.: "$\Rightarrow$" sia B una base di V, devo dimostrare che ogni $v \in V$ si può scrivere come combinazione lineare di B in un unico modo; sia $v \in V$; dato che B è in particolare un sistema di generatori per V, allora v si scrive come combinazione lineare di B: $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$; dobbiamo mostrare l'unicità di tale scrittura; supponiamo che ne esista un'altra:

$$v = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n, \quad \mu_i \in K$$

allora $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n$, pertanto

$$(\lambda_1 - \mu_1) v_1 + \dots + (\lambda_n - \mu_n) v_n = 0$$

questa è una combinazione lineare nulla di $v_1, \dots, v_n$; dato che B è linearmente indipendente, l'unica possibilità è che valga

$$\lambda_1 - \mu_1 = \dots = \lambda_n - \mu_n = 0 \text{ se e solo se } \lambda_1 = \mu_1, \dots, \lambda_n = \mu_n$$

il che prova l'unicità della scrittura.

"$\Leftarrow$" supponiamo che ogni $v \in V$ si scriva in maniera unica come combinazione lineare di B; allora in particolare B è un sistema di generatori per V; dimostriamo che gli elementi di B sono linearmente indipendenti; per farlo, supponiamo che esista una combinazione lineare nulla di $v_1, \dots, v_n$:

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$$

d'altra parte, possiamo scrivere $0 = 0 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_n$; dato che la scrittura di 0 come combinazione lineare di $v_1, \dots, v_n$ è unica, discende che $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$, ovvero che $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti.

Def.: sia V uno spazio vettoriale su K finitamente generato, sia $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V e sia $v \in V$; allora possiamo scrivere $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ in modo unico con $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$; gli scalari $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono detti le *coordinate* di v rispetto a B.

Esempi/Esercizi: in K^n possiamo considerare

$$B = \Bigg\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{n \text{ vettori}} \Bigg\}$$

si può dimostrare che B è una base di K^n; tale base è chiamata la base standard di K^n; per ogni vettore $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$, le coordinate di v rispetto alla base standard sono $v_1, \dots, v_n$

Esempi/Esercizi: in $M_{m,n}(K)$ possiamo considerare

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & 0 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & & \\ \vdots & & 0 & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & 0 & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

si può dimostrare che B è una base di $M_{m,n}(K)$.

Oss.: in K^n, l'essere un sistema di generatori può essere parafrasato in termini di sistemi lineari; infatti, se $\{v_1, \dots, v_s\} \subseteq K^n$ è un sistema di generatori, allora per ogni $v \in K^n$ esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in K$ tali che

$$v = \lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_s v_s$$

scriviamo

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{pmatrix}, \dots, v_s = \begin{pmatrix} a_{s1} \\ \vdots \\ a_{sn} \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

allora l'essere v una combinazione lineare di $v_1, \dots, v_n$ equivale ad avere

$$\begin{cases} b_1 = \lambda_1 a_{11} + \dots + \lambda_s a_{s1} \\ \vdots \\ b_n = \lambda_1 a_{1n} + \dots + \lambda_s a_{sn} \end{cases}$$

quindi v è combinazione lineare di $v_1, \dots, v_s$ se e solo se il sistema lineare

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{s1} \\ \vdots & & \\ a_{1n} & \dots & a_{sn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

è compatibile, ovvero ammette una soluzione

analogamente, anche l'essere linearmente indipendenti può essere parafrasato in termini di sistemi lineari: con la notazione precedente $v_1, \dots, v_s$ sono linearmente indipendenti se e solo se il sistema lineare omogeneo dato da:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{s1} \\ \vdots & & \\ a_{1n} & \dots & a_{sn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

ammette come unica soluzione la soluzione nulla: $\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \vdots \\ \lambda_s = 0 \end{cases}$

Consideriamo alcuni importanti risultati riguardo alle basi.

Teor.: (teorema di estrazione di una base)

sia V uno spazio vettoriale su K finitamente generato, sia $\{v_1, \dots, v_k\}$ un sistema di generatori di V; allora esiste $B \subseteq \{v_1, \dots, v_k\}$ tale che B è una base di V.

Dim. (idea) costruiamo questa base in maniera algoritmica e possiamo supporre che $V \neq \{0\}$ (perché il caso $V = \{0\}$ è di facile risoluzione); useremo l'algoritmo dello scarto.

1. inizializziamo $B = \{\}$.
2. consideriamo v_1; se $v_1 = 0$, non facciamo nulla; se $v_1 \neq 0$, aggiungiamo v_1 a B
3. consideriamo v_2: se $v_2 \in \mathrm{span}(v_1)$, lo scartiamo; altrimenti lo aggiungiamo a B
4. consideriamo v_3: se $v_3 \in \mathrm{span}(v_1, v_2)$, lo scartiamo, altrimenti lo aggiungiamo a B

$\vdots$

otteniamo un sottoinsieme di $\{v_1, \dots, v_k\}$ che si può dimostrare essere una base di V.

Teor.: (teorema del completamento o dell'estensione)

sia V uno spazio vettoriale su K finitamente generato e siano $\{v_1, \dots, v_p\}$ vettori linearmente indipendenti; allora esiste una base B di V tale che $\{v_1, \dots, v_p\} \subseteq B$ (ovvero $\{v_1, \dots, v_p\}$ possono essere completati a una base di V).

Dim. (idea) dato che V è finitamente generato, esiste $\{w_1, \dots, w_r\}$ un sistema di generatori finito di V; allora $\{v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_r\}$ è anche esso un sistema di generatori per V; ora applico a quest'ultimo insieme l'algoritmo dello scarto, ottenendo una base B di V; per come è fatto l'algoritmo dello scarto e dato che $v_1, \dots, v_p$ sono linearmente indipendenti per ipotesi, essi saranno sempre scelti dall'algoritmo, e pertanto avremo che $\{v_1, \dots, v_p\} \subseteq B$.

I due teoremi precedenti ci fanno capire perché le basi possono essere equivalentemente caratterizzate come sistemi di generatori minimali oppure come insiemi linearmente indipendenti massimali.

Lemma: (lemma di Steinitz)

sia V uno spazio vettoriale su K finitamente generato e sia $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V; allora per ogni $k > n$ e per ogni scelta di vettori $w_1, \dots, w_k \in V$ vale che $w_1, \dots, w_k$ sono linearmente dipendenti.

Dim. (idea) per ipotesi vale che

$$\begin{aligned} w_1 &= c_{11} v_1 + \dots + c_{n1} v_n \\ w_2 &= c_{12} v_1 + \dots + c_{n2} v_n \\ &\vdots \\ w_k &= c_{1k} v_1 + \dots + c_{nk} v_n \end{aligned}$$

si può mostrare che, se definiamo

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & & c_{nk} \end{pmatrix}$$

allora $w_1, \dots, w_k$ sono linearmente dipendenti se e solo se il sistema lineare omogeneo $C \cdot X = 0$ ammette una soluzione non tutta nulla; osserviamo la matrice C: essa ha n righe e k colonne; per ipotesi $k > n$, quindi ci sono più colonne che righe; se, tramite l'algoritmo di gradinizzazione di Gauss portiamo C nella forma a scala, otterremo dunque una matrice del tipo:

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} * & & & \\ & * & & \\ & & * & \\ & & & * \end{pmatrix}$$

dato che ci sono più colonne che righe, almeno uno di questi scalini sarà lungo più di 1, il che significa che almeno una incognita nel sistema lineare può essere scelta liberamente e quindi in particolare può essere scelta non nulla, determinando dunque una soluzione non tutta nulla dell'equazione.

Teorema: sia V uno spazio vettoriale su K finitamente generato; siano $\{v_1, \dots, v_n\}$ e $\{w_1, \dots, w_m\}$ due basi di V; allora

$$\boxed{n = m}$$

(equivalentemente, due basi di uno spazio vettoriale finitamente generato hanno lo stesso numero di elementi)

Dim.: dato che $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base, allora deve essere $m \leq n$ per il lemma di Steinitz (perché altrimenti $\{w_1, \dots, w_m\}$ non sarebbero linearmente indipendenti); dal momento che $\{w_1, \dots, w_m\}$ è una base, deve essere $n \leq m$ per il lemma di Steinitz (perché altrimenti $\{v_1, \dots, v_n\}$ non sarebbero linearmente indipendenti); quindi $n = m$.