Dimensione e rango

Def: sia V uno spazio vettoriale su K finitamente generato
- se $V = \{0\}$, definiamo la <u>dimensione</u> di V come 0
- se $V \neq \{0\}$, definiamo la dimensione di V come il numero di elementi di una sua qualsiasi base

indichiamo la dimensione di V con $\dim_K V$ (o anche $\dim V$)

Esempi: $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ (infatti $\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \right\}$ è base di $\mathbb{R}^2$)

$\dim_K K^2 = 2$ (stesso ragionamento fatto per $\mathbb{R}^2$ vale per K^2)

$\dim_K K^n = n$

$\dim_K M_{m,n}(K) = m \cdot n$ (una base è data dalle matrici con una sola entrata uguale a 1 e tutte le altre entrate uguali a 0)

Oss: il concetto di dimensione si applica anche ai sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale

Prop: sia V uno spazio vettoriale finitamente generato su K; sia $W \subseteq V$ un sottospazio vettoriale, allora:
1. $\dim W \leq \dim V$
2. $\dim W = \dim V$ se e solo se $W = V$.

Dim: omessa.

Con la dimensione, abbiamo associato <u>un</u> numero ad uno spazio vettoriale (finitamente generato). Tramite questa nozione, associamo <u>un</u> numero ad una matrice.

Oss: se $A \in M_{m,n}(K)$, allora le colonne di A sono elementi di K^m:
$$A^{(1)}, \dots, A^{(n)} \in K^m$$

Def: sia $A \in M_{m,n}(K)$; definiamo il <u>rango</u> di A, e lo denotiamo $rg(A)$, il numero naturale
$$rg(A) = \dim \big(\underbrace{\operatorname{span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)})}_{\text{sottospazio generato dalle colonne di } A} \big)$$

Oss: se $A \in M_{m,n}(K)$, allora
- $rg(A) \leq m$, infatti $A^{(1)}, \dots, A^{(n)} \in K^m$, dunque $\operatorname{span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}) \subseteq K^m$, dunque
$$\underbrace{\dim(\operatorname{span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}))}_{rg(A)} \leq \underbrace{\dim K^m}_{m},$$
- $rg(A) \leq n$ perché abbiamo n colonne, dunque $\operatorname{span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)})$ ha n generatori, pertanto una base di $\operatorname{span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)})$ ha al più n generatori, quindi $\dim(\operatorname{span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)})) \leq n$

quindi $rg(A) \leq \min\{n, m\}$.

Esempio: consideriamo:
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
$$rg(A) = \dim \left(\operatorname{span} \left(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} \right) \right)$$
vale che $rg(A) \leq \min\{2, 3\} = 2$

se fosse $rg(A) = 1$, allora tutte le colonne sarebbero proporzionali tra loro (ovvero ottenibili una dall'altra tramite moltiplicazione per uno scalare), ma questo non è il caso di A, pertanto $rg(A) = 2$.

Esempio: $$rg(\mathbb{1}_n) = \dim \left(\operatorname{span} \left(\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\0\\1\end{pmatrix} \right) \right) = \dim K^n = n$$

Prop: sia $A \in M_{m,n}(K)$ e sia $\tilde{A}$ una matrice ottenuta da A applicando le tre operazioni elementari OE1, OE2, OE3; allora
1. $rg(A) = rg(\tilde{A})$
2. se $\tilde{A}$ è a scala, allora
$$rg(\tilde{A}) = \text{numero di righe non nulle di } \tilde{A}$$

Prop: $rg(A) = rg({}^tA)$

Questo ci dà un <u>algoritmo</u> per calcolare il rango di una matrice.

Esempio:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$
$rg(A) = 1$ perché le righe (o le colonne) sono proporzionali

Teor: (teorema di dimensione per soluzioni di sistemi lineari)

sia $A \in M_{m,n}(K)$; sia
$$W = \{ s \in K^n : A \cdot s = 0 \} \subseteq K^n$$
ovvero W è l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato ad A, allora
$$\dim W = n - rg(A)$$

Dim: seguirà dalla teoria delle applicazioni lineari.

Teor: (teorema di Rouché - Capelli)

sia $A \in M_{m,n}(K)$ e sia $b \in K^m$, allora il sistema lineare $A \cdot X = b$ è compatibile (ovvero ammette almeno una soluzione) se e solo se $rg(A) = rg(A|b)$; in tal caso, la generica soluzione del sistema dipende da $n - rg(A)$ parametri liberi.

Dim: per mostrare la prima parte del teorema, notiamo che se $s \in K^n$, con $s = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$, allora
$$A \cdot s = b \iff s_1 \cdot A^{(1)} + \dots + s_n \cdot A^{(n)} = b$$
(questa osservazione si ottiene scrivendo esplicitamente il prodotto righe per colonne di A per s); dimostriamo la prima parte

"$\Rightarrow$" supponiamo che $A \cdot X = b$ sia compatibile; allora esiste $s \in K^n$ soluzione del sistema, dunque $A \cdot s = b$; per quanto osservato, questo equivale a dire che $s_1 \cdot A^{(1)} + \dots + s_n \cdot A^{(n)} = b$, il che significa che b è combinazione lineare di $A^{(1)}, \dots, A^{(n)}$, ovvero delle colonne di A, pertanto
$$b \in \operatorname{span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)})$$
questo implica che
$$\operatorname{span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}) = \operatorname{span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}, b)$$
infatti

"$\subseteq$" se $u \in \operatorname{span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)})$, allora $u = \lambda_1 A^{(1)} + \dots + \lambda_n A^{(n)}$, pertanto $u = \lambda_1 A^{(1)} + \dots + \lambda_n A^{(n)} + 0 \cdot b$, ovvero $u \in \operatorname{span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}, b)$

"$\supseteq$" se $u \in \operatorname{span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}, b)$, allora $u = \lambda_1 A^{(1)} + \dots + \lambda_n A^{(n)} + \lambda \cdot b$ ma $b = s_1 \cdot A^{(1)} + \dots + s_n \cdot A^{(n)}$, quindi
$$u = \lambda_1 A^{(1)} + \dots + \lambda_n A^{n} + \lambda (s_1 A^{(1)} + \dots + s_n A^{(n)}) =$$
$$= (\lambda_1 + \lambda \cdot s_1) A^{(1)} + \dots + (\lambda_n + \lambda \cdot s_n) \cdot A^{(n)}$$
pertanto $u \in \operatorname{span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)})$

allora
$$\underbrace{\dim(\operatorname{span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}))}_{rg(A)} = \underbrace{\dim(\operatorname{span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}, b))}_{rg(A|b)}$$

"$\Leftarrow$" supponiamo che valga $rg(A) = rg(A|b)$; allora per definizione
$$\dim(\operatorname{span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)})) = \dim(\operatorname{span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}, b))$$
dato che vale sempre che $\operatorname{span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}) \subseteq \operatorname{span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}, b)$, il fatto che le dimensioni di questi due sottospazi sono uguali implica che i sottospazi stessi siano uguali, dunque
$$\operatorname{span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}) = \operatorname{span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}, b)$$
pertanto, dato che $b \in \operatorname{span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}, b)$, segue che $b \in \operatorname{span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)})$, ma abbiamo osservato che quest'ultima condizione è equivalente al fatto che esista una soluzione $s \in K^n$ del sistema $A \cdot X = b$, ovvero che quest'ultimo sia compatibile

abbiamo quindi mostrato la prima parte del teorema; mostriamo ora la seconda parte del teorema, ovvero che, quando il sistema $AX = b$ è compatibile, la sua generica soluzione dipende da $n - rg(A)$ parametri liberi; per farlo, usiamo il teorema di struttura per sistemi lineari e il teorema di dimensione per le soluzioni di un sistema lineare omogeneo; il primo ci dice che la generica soluzione s del sistema $A \cdot X = b$ è della forma $s = \tilde{s} + s_0$ dove $\tilde{s}$ è una soluzione fissata di $AX = b$ ed s_0 è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato $AX = 0$; il teorema di dimensione ci dice che il sottospazio vettoriale W delle soluzioni di $AX = 0$ ha dimensione $n - rg(A)$; sia $k = n - rg(A)$; allora esiste una base $\mathcal{B}$ di W formata da k elementi
$$\mathcal{B} = \{ w_1, \dots, w_k \}$$
e ogni elemento di W è combinazione lineare in maniera unica di $\mathcal{B}$; pertanto s_0 è della forma $s_0 = t_1 \cdot w_1 + \dots + t_k \cdot w_k$ per certi $t_1, \dots, t_k \in K$; in definitiva, la generica soluzione s di $AX = b$ è della forma
$$s = \hat{s} + t_1 \cdot w_1 + \dots + t_k w_k$$
dove $t_1, \dots, t_k \in K$. □

Esempio: consideriamo il sistema lineare
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ x_2 - x_4 = 2 \end{cases}$$
per vedere se il sistema sia compatibile usiamo il teorema di Rouché - Capelli:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$(A|b) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$
$rg(A) = 2$ perché A è a scala e ha 2 righe non nulle

$rg(A|b) = 2$ perché $(A|b)$ è a scala e ha 2 righe non nulle

dunque $rg(A) = rg(A|b)$ pertanto il sistema è compatibile e la generica soluzione dipende da $4 - 2 = 2$ parametri liberi

per determinare tutte le soluzioni, cominciamo col calcolare una soluzione particolare:
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ x_2 - x_4 = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 2x_2 - 3x_3 + x_4 + 1 \\ x_2 = x_4 + 2 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x_1 = 2(x_4 + 2) - 3x_3 + x_4 + 1 \\ x_2 = x_4 + 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = -3x_3 + 3x_4 + 5 \\ x_2 = x_4 + 2 \end{cases}$$
per determinare una soluzione particolare assegniamo dei valori a x_3 e x_4 ottenendo $\tilde{s} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; a questo punto determiniamo una base delle soluzioni del sistema $AX = 0$, ovvero
$$\begin{cases} x_2 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3x_4 - 3x_3 \\ x_2 = x_4 \end{cases}$$
le soluzioni sono della forma
$$\begin{pmatrix} -3x_3 + 3x_4 \\ x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

verificare che questi due vettori formano una base delle soluzioni di $AX = 0$.