Lezione 8 novembre 2023

mercoledì 8 novembre 2023 11:12

DIMENSIONE DI SPAZI VETTORIALI

LEMMA DI STEINITZ:

Sia V SV su $\mathbb{K}$, e sia $\mathcal{B}=\{v_1,\dots,v_n\}$ una sua base.

Allora $\forall\ p>n$ e $\forall$ scelta di vettori $w_1,\dots,w_p \in V$, si ha che $w_1,\dots,w_p$ sono LIN. DIPENDENTI.

Dim.: I vettori w_i si scrivono in modo UNICO come

$$w_1 = c_{11}v_1 + c_{21}v_2 + \dots + c_{n1}v_n$$
$$w_2 = c_{12}v_1 + c_{22}v_2 + \dots + c_{n2}v_n$$
$$\vdots$$
$$w_p = c_{1p}v_1 + c_{2p}v_2 + \dots + c_{np}v_n$$

Denoto con $\begin{pmatrix} c_{1i} \\ c_{2i} \\ \vdots \\ c_{ni} \end{pmatrix}$ la colonna delle coordinate di w_i.

$w_1,\dots,w_p$ sono LIN. DIP. $\iff$ $\exists$ una comb. lineare con coefficienti non tutti nulli tali che

$$a_1 w_1 + a_2 w_2 + \dots + a_p w_p = 0_V$$

ovvero, in coordinate:

$$a_1\begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{n1} \end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \vdots \\ c_{n2} \end{pmatrix} + \dots + a_p\begin{pmatrix} c_{1p} \\ c_{2p} \\ \vdots \\ c_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff$$

$$\underbrace{\underset{n\times p}{\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{np} \end{pmatrix}} \cdot \underset{p\times 1}{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix}}}_{n\times 1} = \underset{n\times 1}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}$$

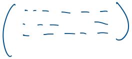
$\implies$

Come in $\mathbb{K}^n$, le LIN. DIP. $\Leftrightarrow \exists$ di soluzione non nulle del SLO

$$C \cdot X = 0$$

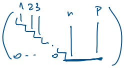
dove C = matrice le cui colonne sono le coordinate di vettori w_i nella base $\mathcal{B}$

Nel nostro caso C è di tipo $n \times p$ con $p > n$:

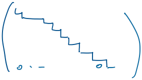


Metto C a scala con OE e siccome $p > n$, nel SLO equivalente associato alla matrice a scala ci sarà almeno 1 incognita libera (almeno 1 gradino comprende 2 colonne)

es.



oppure :



Posso scegliere il valore per l'incognita libera; scelgo il valore $1 \in \mathbb{K}$, ad esempio (o qualunque altro $\neq 0$).
Con il procedimento visto nelle settimane scorse, posso calcolare ovvero fissare dei valori per le altre incognite, trovo $S = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

per costruzione, soluzione di $C \cdot X = 0$

$\Rightarrow w_1, \ldots, w_p$ sono LINEARMENTE DIPENDENTI.

Teorema: Sia V uno SV su $\mathbb{K}$.

Se $\{v_1, \dots, v_n\}$ e $\{w_1, \dots, w_m\}$ sono due basi di V, allora

$$n = m.$$

Def: Sia V SV su $\mathbb{K}$, V finitamente generato; la DIMENSIONE di V è:

- se $V = \{0\}$, $\dim V := 0$
- se $V \neq \{0\}$, $\dim V := \#$ di vettori di una sua base qualunque.

Dim. del Teorema:

Per ipotesi $\{v_1, .., v_n\}$ base

$w_1, \dots, w_m$ vettori lin. INDIP.

$$\xRightarrow[\text{Lemma di Steinitz}]{} \quad m \leq n$$

(se per assurdo fosse $m > n \Rightarrow w_1, .., w_m$ lin DIP.)

Ora: $\{w_1, .., w_m\}$ base

$v_1, .., v_n$ LIN. INDIP.

$$\xRightarrow[\text{Steinitz}]{} \quad n \leq m.$$

Esempi:

① $V = \mathbb{K}^n = \underbrace{\mathbb{K} \times \mathbb{K} \times \cdots \times \mathbb{K}}_{n\text{-volte}}$

$$\mathcal{E} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\} \qquad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\dots \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

è base canonica

ha n elementi

$$\Rightarrow \boxed{\dim \mathbb{K}^n = n}$$

② $V = M_{m,n}(\mathbb{K})$, $\mathcal{E} = \{E_{ij}\}_{\substack{i=1\dots m\\ j=1\dots n}}$

$$(E_{ij})_{ij} = 1, \quad (E_{ij})_{kl} = 0$$

$$\forall (k,l) \neq (i,j)$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

è base

Sono in numero $m \cdot n$

$$\Rightarrow \dim M_{m,n}(\mathbb{K}) = m \cdot n$$

Es: $\dim M_2(\mathbb{K}) = 4$, $\dim M_{3,4}(\mathbb{K}) = 12$

③ $Sym(n, \mathbb{K}) \subseteq M_n(\mathbb{K})$, $\dim M_n(\mathbb{K}) = n^2$

$= \{$matrici simmetriche$\}$

è SSV

$\dim Sym(n, \mathbb{K}) = ?$

Es: $Sym(2, \mathbb{K}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{K} \right\}$

$\dim Sym(2, \mathbb{K}) = 3$

base: $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ le tre matrici sono un insieme di generatori

Sono anche LIN. INDIPENDENTI (esercizio) $\Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} \right\}$

è una base di $Sym(2, \mathbb{K})$

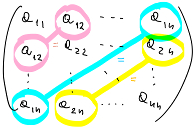
$$Sym(3,\mathbb{K}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} : a,b,c,d,e,f \in \mathbb{K} \right\}$$

$$\dim Sym(3,\mathbb{K}) = 6$$

base: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\dim Sym(n,\mathbb{K}) = \frac{n(n+1)}{2} = \sum_{i=1}^{n} i$$



n elementi

n-1

⋮

1

Una base è data dalle matrici

$$\{ M_i, M_{kl} : i=1,\dots,n,\ 1 \le k < l \le n \}$$

dove $(M_i)_{rs} = \begin{cases} 1 & \text{se } r=s=i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

④ $\mathbb{C}$ è un campo; in part. $\mathbb{C}$ è

SV su se stesso

$$\dim \mathbb{C} = ?$$

$$\mathbb{C} = Span(1),$$

infatti: $\forall z \in \mathbb{C},\ z = z \cdot 1 \Rightarrow \{1\}$ genera tutto $\mathbb{C}$

inoltre $1 \neq 0 \Rightarrow 1$ è LIN. INDIP. $\Rightarrow \{1\}$ è base di $\mathbb{C}$

IN GENERALE: $\forall\ \mathbb{K}$ campo, $\mathbb{K}$ è SV su se stesso, e $\mathbb{K} = \operatorname{Span}(1) \Rightarrow \dim \mathbb{K} = 1$

altre basi: sia $w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0 \Rightarrow$ è LIN. INDIP.

inoltre $\forall z \in \mathbb{C}$, $z = \underbrace{(z \cdot w^{-1})}_{\in \mathbb{C}} \cdot w$: ogni $z \in \mathbb{C}$ è multiplo di w

$\Rightarrow \{w\}$ è base di $\mathbb{C}$

$\Rightarrow \dim \mathbb{C} = 1$

⑤ $\mathbb{C}$ si può munire anche con una struttura di SV su $\mathbb{R}$:

$+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ somma usuale

$(a+ib) + (c+id) = (a+c) + i(b+d)$

$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

$\alpha \in \mathbb{R}$, $z = a + ib \in \mathbb{C}$

$\alpha \cdot (a+ib) := \alpha a + i\alpha b$

Si può verificare facilmente che + e · verificano (V1), …, (V8)

Base di $\mathbb{C}$ come SV su $\mathbb{R}$

è, ad esempio, $\{1, i\}$

infatti: $\forall z \in \mathbb{C}$, $z = a \cdot 1 + b \cdot i$, $a, b \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \{1, i\}$ è un insieme di generatori

1 e i sono LIN. INDIP.:

$c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot i = 0 \in \mathbb{C}$

$c_1 + ic_2 = 0 \Leftrightarrow c_1 = 0 \quad c_2 = 0$

$\Rightarrow \{1, i\}$ è base $\mathbb{C}$ come SV su $\mathbb{R}$

$\Rightarrow \dim_{\textcircled{\scriptsize R}} \mathbb{C} = 2$

per precisare che è SV su $\mathbb{R}$

Prop. Sia V uno SV su $\mathbb{K}$ e sia

$$\dim V = n.$$

Allora si ha:

① se $w_1, \dots, w_n$ LIN. INDIP. $\Rightarrow$ $w_1, \dots, w_n$ sono GENERATORI

② se $u_1, \dots, u_n$ sono GENERATORI $\Rightarrow$ sono LIN. INDIP.

Dim: ① $w_1, \dots, w_n$ LIN. IND. $\underset{\text{Teo di Completamento}}{\Longrightarrow}$ completo a base $\mathcal{B}$ di V

per Teo. di prima, ogni base ha n elementi

$$\underbrace{\{w_1, \dots, w_n\}}_{n \text{ elementi}} \subseteq \underbrace{\mathcal{B}}_{n \text{ elementi}} \Rightarrow \{w_1, \dots, w_n\} = \mathcal{B}$$

② $u_1, \dots, u_n$ generatori $\underset{\text{Teo. di Estrazione}}{\Longrightarrow}$ posso estrarre una base $\mathcal{B}$ di V

$$\underbrace{\mathcal{B}}_{n \text{ elementi}} \subseteq \underbrace{\{u_1, \dots, u_n\}}_{n \text{ elementi}}$$

$$\Rightarrow \mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$$

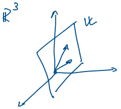
Es: in $\mathbb{R}^2$ trovare base:

so $\dim \mathbb{R}^2 = 2$; basta scegliere 2 vettori LIN. INDIP., cioè non nulli e non proporzionali

DIMENSIONE DI SSV.

OSS. 1: Sia $W \subseteq V$ SSV, e cons. W come $\mathbb{K}$-SV.

Allora: se $w_1, .., w_k \in W$ sono LIN. INDIP. in W $\Rightarrow$ sono anche LIN. INDIP. in V



Infatti: il campo $\mathbb{K}$ è lo stesso per W e V; quindi la def. di INDIP. è la stessa.

OSS. 2: Se V è finitamente generato, e $W \subseteq V$ è SSV $\Rightarrow$ W è finitamente generato.

Dim: $\dim V = n$; se $W = \{0_V\}$ ok, $W = \mathrm{Span}(0_V)$

supp. $W \neq \{0_V\}$

fisso $w_1, .., w_k \in W$ LIN. INDIP. in W

$\mathrm{Span}(w_1, .., w_k) \subseteq W$

se vale $=$ ok, altrimenti

cons. $w_{k+1} \in W \setminus \mathrm{Span}(w_1 .., w_k)$ (cioè $w_{k+1} \notin W$

e $w_{k+1} \notin \mathrm{Span}(w_1, .., w_k)$)

$\Rightarrow$ $w_1, \dots, w_k, w_{k+1}$ sono LIN. INDIP.

per un Lemma visto.

Ripeto il ragionamento:

$\mathrm{Span}(w_1 .., w_k, w_{k+1}) \subseteq W$

se vale $=$ ok, altrimenti scelgo

$w_{k+2} \in W \setminus \mathrm{Span}(w_1 .., w_{k+1})$

Costruisco insiemi finiti di vettori LIN. INDIP.

in W $\Rightarrow$ per OSS 1 sono LIN. INDIP. in V

Per Lemma di Steinitz, il procedimento finisce dopo # finito di passi.