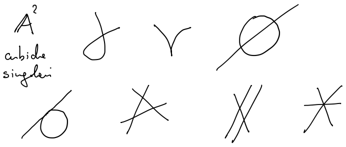
Lezione 30 ottobre 2023

lunedì 30 ottobre 2023 09:11

Prossimo obiettivo: cons. $Z_p(F) \subseteq \mathbb{P}^2$ opp. $Z(f) \subseteq \mathbb{A}^2$

supp. che F, ovvero f siano RIDOTTI (cioè senza fattori irriducibili multipli)

$\mathbb{A}^2$ cubiche singolari



Vedremo: sono in # finito.

Def.: Poniamo $(Z_p(F))_{Sing} := \{Q \in Z_p(F) : Q \text{ è singolare}\}$

$(Z(f))_{Sing} :=$ —"—

Idea: in $\mathbb{P}^2$:

$$Q \in (Z_p(F))_{Sing} \iff \nabla F(Q) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff Q \in Z_p(\partial_{x_0} F) \cap Z_p(\partial_{x_1} F) \cap Z_p(\partial_{x_2} F)$$

in $\mathbb{A}^2$: $\underline{q} \in (Z(f))_{Sing} \iff \nabla f(\underline{q}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $f(\underline{q}) = 0$

$$\iff \underline{q} \in Z(f) \cap Z(\partial_x f) \cap Z(\partial_y f)$$

Cerchiamo, quindi, zeri comuni a un sistema di equazioni NON LINEARI.

Per fare ciò, introduciamo il RISULTANTE di SYLVESTER (Londra 1814 – Oxford 1897)

Introdusse i termini di MATRICE, GRAFO, DISCRIMINANTE.

Partiamo dal caso di 1 indeterminata:

$f(x), g(x) \in \boxed{K[x]}$

se hanno 1 radice comune $c \in K$

$\Rightarrow (x-c)$ divide $f(x)$ e $g(x)$

Teo. Ruffini

Cerchiamo, quindi, più in generale, un criterio affinché $f(x)$ e $g(x)$ abbiano un fattore in comune.

È anche opportuno cons. un insieme dei coeff. più generale di K, e cioè:

sia A = anello commutativo, che sia UFD
domini di integrità (senza divisori dello zero)

(es.: $A = \mathbb{C}[t]$, $A = \mathbb{C}[x_0, x_1]$

ricordo: B UFD $\Rightarrow B[z]$ è UFD)

Ricordo, infine, che per A dominio di integrità, si può costruire

$$Q(A) := \{(a,b) \mid a,b \in A,\ b \neq 0\} \big/ \sim$$

CAMPO DEI
QUOZIENTI DI A

dove $\sim$ è rel. di equiv. definita da

$$(a,b) \sim (c,d) \iff a\cdot d = b\cdot c$$

NOTAZIONE : $[(a,b)] =: \frac{a}{b}$

Problema: $f(x),\ g(x) \in A[x]$

$\deg f = m \geq 1, \quad \deg g = n \geq 1$

Quando hanno un fattore in comune?

OSS.: Se $f = h\cdot u, \quad g = h\cdot v$

$\deg u < m \qquad \deg v < n$

allora $v\cdot f = h\cdot u\cdot v = u\cdot g$

$$\boxed{f\cdot v = g\cdot u}$$

È vero anche il viceversa:

LEMMA DI BEZOUT:

Se $\exists\ u, v \in A[x]$ con $\deg u < \deg f$ e $\deg v < \deg g$

tali che $f\cdot v - g\cdot u = 0$

Allora f e g hanno un fattore in comune.

Dim.: $A[x]$ è UFD

$f\cdot v = f_1^{m_1} \cdots f_r^{m_r} \cdot v_1^{k_1} \cdots v_s^{k_s}$, f_i, v_j irriducibili

$g\cdot u = g_1^{h_1} \cdots g_\ell^{n_\ell} \cdot u_1^{h_1} \cdots u_p^{h_p}$

$f\cdot v = g\cdot u$

siccome $A[x]$ è UFD, i fattori irriducibili, a meno di permut. e di molt. per elem. invertibili, sono gli stessi

$\deg v < \deg g \Rightarrow$ i fattori di v non possono esaurire i fattori di g

$\Rightarrow \exists$ almeno un fattore irriduc. di g che è anche fattore irr. di f.

Come utilizzare Lemma di Bézout:

Esempio: $f = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \qquad a_3 \neq 0$

$g = b_2x^2 + b_1x + b_0$

cerco : u, v : $\deg u < 3 \qquad u = \gamma x^2 + \delta x + \varepsilon$

$\deg v < 2 \qquad v = \alpha x + \beta$

$f \cdot v - g \cdot u = 0$

$$(a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0) \cdot (\alpha x + \beta) - (b_2 x^2 + b_1 x + b_0)(\gamma x^2 + \delta x + \varepsilon) = 0$$

$$(a_3 \alpha - b_2 \gamma) x^4 + (a_3 \beta + a_2 \alpha - b_2 \delta - b_1 \gamma) x^3 +$$

$$+ (a_2 \beta + a_1 \alpha - b_1 \delta - b_0 \gamma - b_2 \varepsilon) x^2 +$$

$$+ (a_0 \alpha + a_1 \beta - b_0 \delta - b_1 \varepsilon) x + (a_0 \beta - b_0 \varepsilon) = 0$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} a_3 \alpha - b_2 \gamma = 0 \\ a_2 \alpha + a_3 \beta - b_1 \gamma - b_2 \delta = 0 \\ a_1 \alpha + a_2 \beta - b_0 \gamma - b_1 \delta - b_2 \varepsilon = 0 \\ a_0 \alpha + a_1 \beta - b_0 \delta - b_1 \varepsilon = 0 \\ a_0 \beta - b_0 \varepsilon = 0 \end{cases}$$

nelle incognite $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)$

$$\begin{pmatrix} a_3 & 0 & -b_2 & 0 & 0 \\ a_2 & a_3 & -b_1 & -b_2 & 0 \\ a_1 & a_2 & -b_0 & -b_1 & -b_2 \\ a_0 & a_1 & 0 & -b_0 & -b_1 \\ 0 & a_0 & 0 & 0 & -b_0 \end{pmatrix} = M$$

è SLO di 5 eq. in 5 incognite.

Voglio che esista almeno una soluzione

$(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon) \neq (0,0,0,0,0)$

Per RC oppure Cramer, questo succede $\Longleftrightarrow$

$\det$ (matrice dei coefficienti) $= 0$.

Sylvester, invece di M, considera ${}^tM$, e moltiplica tutte le righe relative ai coeff. b_j per (-1):

$$R(f,g) := \det \begin{pmatrix} a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ b_2 & b_1 & b_0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & b_1 & b_0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & b_1 & b_0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix} a \\ a \end{matrix}}\right\} \deg g \text{ volte} \\ \\ \left.\vphantom{\begin{matrix} a \\ a \\ a \end{matrix}}\right\} \deg f \text{ volte} \end{matrix} \in A$$

IN GENERALE:

Si può verificare che due polinomi

f di grado $\deg f = m$, $f = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_0$

g di $\deg g = n$, $g = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0$

hanno 1 fattore comune se:

$$R(f,g) = \det \underbrace{\begin{pmatrix} a_m & a_{m-1} & \cdots & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_m & a_{m-1} & \cdots & a_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & & & & & \cdots & a_0 \\ b_n & b_{n-1} & \cdots & \cdots & b_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & b_n & & & b_0 \end{pmatrix}}_{} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix} a \\ a \\ a \\ a \end{matrix}}\right\} n \\ \left.\vphantom{\begin{matrix} a \\ a \\ a \end{matrix}}\right\} m \end{matrix} = 0$$

$m \nmid n$

COR.: Se $K = \overline{K}$, dati $f, g \in K[x]$ hanno una radice comune $\Longleftrightarrow R(f,g) = 0$.

Dim.: $\Rightarrow$: se $c \in K$: $f(c) = g(c) = 0$

$\Rightarrow (x-c)$ è fattore di entrambi $\Rightarrow R(f,g) = 0$

Viceversa: Se $R(f,g) = 0 \Rightarrow \exists h$: $f = h \cdot u$
$g = h \cdot v$

$h = h_1^{s_1} \cdots h_r^{s_r}$, h_i irriducibili

ma: su $K = \overline{K}$, gli unici polinomi irriducibili sono quelli lineari $\Rightarrow h_i = a_i (x - c_i)$

$\Rightarrow c_i$ è radice comune di f e g.

CASO PARTICOLARE:

Sia $f \in K[x]$; voglio capire quando f ha radici multiple, cioè $(x-\alpha)^h \mid f$, $h \geq 2$

LEMMA: α è radice multipla di $f \Longleftrightarrow \alpha$ è radice di f e di f'.

Dim: α radice di f

$$f(x) = (x-\alpha)^h \cdot g(x), \quad \text{con } g(\alpha) \neq 0$$

$$f'(x) = h(x-\alpha)^{h-1} g(x) + (x-\alpha)^h \cdot g'(x)$$

$h \geq 2 \Longleftrightarrow (x-\alpha)$ divide $f'(x)$

$h = 1$: $f'(\alpha) = h \cdot g(\alpha) = g(\alpha) \neq 0$

$\Rightarrow$ su $K = \overline{K}$, f ha radice multipla $\Longleftrightarrow f$ e f' radice comune $\Longleftrightarrow f$ e f' hanno un fattore comune $\Longleftrightarrow \underbrace{R(f,f')}_{\Delta(f)} = 0$

$\Delta(f)$ DISCRIMINANTE DI SYLVESTER

Esempio: $f(x) = ax^2 + bx + c$ $\deg = 2$, $a \neq 0$

$f'(x) = 2ax + b$ $\deg = 1$

$$\Delta(f) = \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2a & b & 0 \\ 0 & 2a & b \end{pmatrix} = a \cdot b^2 - 2a(b^2 - 2ac)$$

$$= ab^2 - 2ab^2 + 4a^2c$$

$$= -ab^2 + 4a^2c$$

$$= -\underset{\neq 0}{a}\underbrace{(b^2 - 4ac)}_{=0}$$