Lezione 31 ottobre 2023

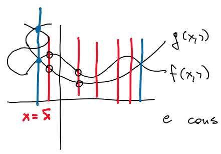
martedì 31 ottobre 2023 09:16

Visto: $R(f,g)$, $f,g \in A[x]$, A dominio di integrità
UFD

Prop: f e g hanno un fattore comune $\Longleftrightarrow$ $R(f,g) = 0$

Vogliamo ora cons. polinomi in più indeterminate.

$f(x,y),\ g(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$, $\deg f = m$
$\deg g = n$



idea : fisso $x = \bar{x}$

e cons. $R_y(f(\bar{x},y), g(\bar{x},y))$

Posso supporre $f(\bar{x},y)$ e $g(\bar{x},y)$ polinomi non costanti in y (se uno dei due fosse costante, ad esempio $f(\bar{x},y)$, vorrebbe dire che in $f(x,y)$ non compare y, $f(x,y) = f(x)$; allora si avrebbe $Z(f(x)) = Z(\prod_{i=1}^{m}(a_i x + b_i))$, perché $\mathbb{C} = \bar{\mathbb{C}}$ e ogni polinomio fattorizza nel prodotto di fattori lineari.
Osservo ora che $Z(\prod_{i=1}^{m}(a_i x + b_i))$ = unione di m rette verticali, non nec. tutte distinte, quindi studiare $Z(f(x)) \cap Z(g(x,y))$ equivale a studiare $\cap$ con ciascuna retta).

Quindi: $\mathbb{C} = \bar{\mathbb{C}}$, $f(\bar{x},y) \in \mathbb{C}[y]$ polinomio non costante

$\Longrightarrow$ $Z(f(\bar{x},y)) \neq \emptyset$
$\# Z(f(\bar{x},y)) < +\infty$
se la retta $x = \bar{x}$ non è una componente della curva,
ovvero $(x - \bar{x})$ non divide $f(x,y)$

Analog. per $g(\bar{x},y)$

Cerco gli $\bar{x}$ t.c. $f(\bar{x},y)$ e $g(\bar{x},y)$ abbiano una radice comune; $\mathbb{C} = \bar{\mathbb{C}}$ $\Longrightarrow$

$f(\bar{x},y)$ e $g(\bar{x},y)$ hanno una radice comune $\Longleftrightarrow$ hanno un fattore comune

Allora: lascio libera la x ; scrivo

$$f(x,y) = \underbrace{a_m(x)}_{\in \mathbb{C}} y^m + \underbrace{a_{m-1}(x)}_{\in \mathbb{C}[x]_{\leq 1}} y^{m-1} + \cdots + \underbrace{a_1(x)}_{\in \mathbb{C}[x]_{\leq m-1}} \cdot y + \underbrace{a_0(x)}_{\in \mathbb{C}[x]_{\leq m}}$$

$$g(x,y) = b_n(x) y^n + b_{n-1}(x) y^{n-1} + \cdots + b_0(x)$$

e cons. $R_y(f,g) = \det \begin{pmatrix} a_m(x) & a_{m-1}(x) & \cdots & a_1(x) & a_0(x) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_m(x) & a_{m-1}(x) & \cdots & a_1(x) & a_0(x) & \cdots & & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_m(x) & a_{m-1}(x) & \cdots & a_1(x) & a_0(x) \\ b_n(x) & b_{n-1}(x) & \cdots & b_0(x) & 0 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & b_n(x) & b_{n-1}(x) & \cdots & b_0(x) & 0 & \cdots & & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & b_n(x) & b_{n-1}(x) & \cdots & & b_0(x) \end{pmatrix}$

$= R(x)$

e supp. $a_m(x)$ e $b_n(x)$ SENZA RADICI COMUNI

Questo procedimento si chiama anche
ELIMINAZIONE DI 1 INDETERMINATA (la y)

Due casi: $R(x) \equiv 0$; succede $\Longleftrightarrow$ $f,g \in \mathbb{C}[x][y] = A[y]$, $A = \mathbb{C}[x]$ hanno un fattore comune $h \in A[y]$ per i risultati di ieri

Se $R(x) \not\equiv 0$, le sue radici rappresentano le prime coordinate dei punti di intersezione tra $Z(f)$ e $Z(g)$

Infatti: se $\bar{x}$ è t.c. $R(\bar{x}) = 0 \Rightarrow f(\bar{x}, y)$ e $g(\bar{x}, y)$ hanno una radice comune $\bar{y}$, quindi $f(\bar{x}, \bar{y}) = 0 = g(\bar{x}, \bar{y})$

2 problemi: può succedere che qualche $(x - \bar{x})$ fattore di f o g, oppure che ci siano 2 punti di intersezione $(\bar{x}, \bar{y})$ e $(\bar{x}, y')$.

Siccome vogliamo stimare # di $Z(f) \cap Z(g)$ vorremmo avere una corr. biunivoca tra le radici di $R(x)$ e $Z(f) \cap Z(g)$.

Altro problema: supp. y^m non compare in $f(x,y)$, allora cons. le potenze più alte di y:

es: $f(x,y) = (1-x)y^2 + y + 1$, $\deg f = 3$

$g(x,y) = (1-x)y + 1$, $\deg g = 2$

$$R_y(f,g) = \det \begin{pmatrix} (1-x) & 1 & 1 \\ (1-x) & 1 & 0 \\ 0 & (1-x) & 1 \end{pmatrix} = (1-x)^2 = 0$$

$\iff x = 1 = \bar{x}$; ma $f(1,y) = y + 1$

$g(1,y) = 1$

non hanno radici comuni

È possibile verificare che le chiusure proiettive di $Z(f)$ e $Z(g)$, invece, si intersecano. E' più conveniente lavorare nel piano proiettivo.

* * *

RISULTANTE DI POLINOMI OMOGENEI

Teorema: $F, G \in K[x_0, \dots, x_n]$ omogenei di gradi $\deg_{x_n} F = r$, $\deg_{x_n} G = s$

$$F = A_r x_n^r + A_{r-1} \underbrace{x_n^{r-1}} + \cdots + A_0$$

$A_r \neq 0$, $A_{r-1} = A_{r-1}(x_0, \dots, x_{n-1})$ omogeneo di grado 1

.. A_0 : omogeneo di grado r

$$G = B_s x_n^s + B_{s-1} x_n^{s-1} + \cdots + B_0 \;, \quad B_s \neq 0$$

Cons. $R_{x_n}(F, G) \in K[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]$

o è nullo, oppure è OMOGENEO di grado $r \cdot s$.

Dim.:

$$R_{x_n}(F,G) = \det \begin{pmatrix} A_r & A_{r-1} & \cdots & A_1 & A_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_r & A_{r-1} & \cdots & A_1 & A_0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots A_r & A_{r-1} & \cdots & A_1 & A_0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & A_r & A_{r-1} & \cdots A_1 & A_0 \\ B_s & B_{s-1} & \cdots & B_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_s & B_{s-1} & \cdots & B_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 \cdots & 0 & B_s & B_{s-1} & \cdots & B_1 & B_0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & B_s & B_{s-1} & \cdots & B_1 & B_0 \end{pmatrix} = R(x_0, \dots, x_{n-1})$$

Se $R_{x_n}(F,G) \equiv 0$

$\Rightarrow$ F e G hanno un fattore comune nelle x_n.

Supp. $R(x_0, \dots, x_{n-1}) \not\equiv 0$;

sarà omogeneo di grado $r \cdot s$ $\Leftrightarrow$

$$R(t x_0, \dots, t x_{n-1}) = t^{r \cdot s} R(x_0, \dots, x_{n-1})$$

Gli A_i sono omogenei di grado $r-i$, e i B_j sono omogenei di grado $s-j$.

$$R(t x_0, t x_1, \dots, t x_{n-1}) = \det \begin{pmatrix} A_r & t A_{r-1}(x_i) \cdots & t^{r-1} A_1(x_i) & t^r A_0(x_i) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_r & t \cdot A_{r-1} \cdots & t^{r-1} A_1 & t^r A_0 \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots A_r & t A_{r-1} & \cdots t^{r-1} A_1 & t^r A_0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & A_r & t A_{r-1} \cdots t^{r-1} A_1 & t^r A_0 \\ B_s & t B_{s-1} & \cdots t^s B_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_s & t B_{s-1} & \cdots t^s B_0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix} A \\ A \\ A \\ A \\ A \end{matrix}}\right\} s \text{ righe} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix} B \\ B \end{matrix}}\right) \end{matrix}$$

$$\left.\begin{matrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 \dots 0 & B_s & tB_{s-1} & \dots & t^{s-1}B_1 & t^sB_0 & 0 & \\ 0 & \dots & 0 & B_s & tB_{s-1} & \dots & t^{s-1}B_1 & t^sB_0 \end{matrix}\right) \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}}\right\} r \text{ righe}$$

Esempio: $F(x_0, x_1, x_2) = \overbrace{A_3(x_0, x_1)}^{deg=0} x_2^3 + \overbrace{A_2(x_0, x_1)}^{deg=1} x_2^2 + \overbrace{A_1(x_0, x_1)}^{deg=2} x_2 + \overbrace{A_0(x_0, x_1)}^{deg=3}$

$G(x_0, x_1, x_2) = \underbrace{B_2(x_0, x_1)}_{deg=0} x_2^2 + \underbrace{B_1(x_0, x_1)}_{deg=1} x_2 + \underbrace{B_0(x_0, x_1)}_{deg=2}$

$$R(tx_0, tx_1, tx_2) = \begin{pmatrix} A_3 & tA_2(x_0,x_1) & t^2A_1(x_0,x_1) & t^3A_0(x_0,x_1) & 0 \\ 0 & A_3 & tA_2(x_0,x_1) & t^2A_1(x_0,x_1) & t^3A_0(x_0,x_1) \\ B_2 & tB_1(x_0,x_1) & t^2B_0(x_0,x_1) & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & tB_1(x_0,x_1) & t^2B_0(x_0,x_1) & 0 \\ 0 & 0 & B_2 & tB_1(x_0,x_1) & t^2B_2(x_0,x_1) \end{pmatrix}$$

Trucco: moltiplico le riga i del blocco relativo ai coefficienti A_k per t^i

e analogamente la riga i del blocco dei B_ℓ per t^i

$$\begin{array}{c} \cdot t \\ \cdot t^2 \\ \vdots \\ \cdot t^{s-1} \\ \cdot t^s \\ \cdot t \\ \cdot t^2 \\ \\ \cdot t^{r-1} \\ \cdot t^r \end{array} \begin{pmatrix} tA_r & t^2A_{r-1}(x_i) \dots & t^rA_1(x_i) & t^{r+1}A_0(x_i) & 0 \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & t^2A_r & t^3A_{r-1} & \dots & t^{r+1}A_1 & t^{r+2}A_0 \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & & & t^{s-1}A_r & t^sA_{r-1} & \dots & t^{r+s-2}A_1 & t^{r+s-1}A_0 \; 0 \\ 0 & 0 & \dots & & & 0 & t^sA_r & t^{s+1}A_{r-1} \dots & t^{r+s-1}A_1 & t^{r+s}A_0 \\ tB_s & t^2B_{s-1} & \dots & t^{s+1}B_0 & 0 & 0 \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & t^2B_s & t^3B_{s-1} & \dots & t^{s+2}B_0 & 0 \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 \dots 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & t^{r-1}B_s & t^rB_{s-1} & \dots & t^{r+s-2}B_1 & t^{r+s-1}B_0 \; 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & t^rB_s & t^{r+1}B_{s-1} \dots t^{r+s-1}B_1 & t^{r+s}B_0 \end{pmatrix} \quad (\star)$$

Esempio:

$$\begin{pmatrix} tA_3 & t^2A_2(x_0,x_1) & t^3A_1(x_0,x_1) & t^4A_0(x_0,x_1) & 0 \\ 0 & t^2A_3 & t^3A_2(x_0,x_1) & t^4A_1(x_0,x_1) & t^5A_0(x_0,x_1) \\ tB_2 & t^2B_1(x_0,x_1) & t^3B_0(x_0,x_1) & 0 & 0 \\ 0 & t^2B_2 & t^3B_1(x_0,x_1) & t^4B_0(x_0,x_1) & 0 \\ 0 & 0 & t^3B_2 & t^4B_1(x_0,x_1) & t^5B_2(x_0,x_1) \end{pmatrix}$$

Siccome il determinante è multilineare, il det della nuova matrice è

$$\det \textcircled{\star} = t \cdot t^2 \cdots t^s \cdot t \cdot t^2 \cdots t^r \cdot R(tx_0, tx_1, \dots, tx_{n-1})$$
$$= t^{\frac{s(s+1)}{2}} \cdot t^{\frac{r(r+1)}{2}} \cdot R(tx_0, tx_1, \dots, tx_n)$$

D'altra parte, osserviamo che la matrice $\textcircled{\star}$ ha le colonne che sono multipli della matrice di Sylvester relativa a $F(x_0, \dots, x_n)$ e $G(x_0, \dots, x_n)$, e precisamente: la colonna j è moltiplicata per t^j dove $j = 1, \dots, r+s$

$$\Rightarrow \det \textcircled{\star} = t \cdot t^2 \cdot t^3 \cdots t^{r+s} \cdot R(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$$
$$= t^{\frac{(r+s)(r+s+1)}{2}} \cdot R(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$$

$$\Rightarrow R(tx_0, tx_1, \dots, tx_{n-1}) = t^{\left[\frac{(r+s)(r+s+1)}{2} - \frac{s(s+1)}{2} - \frac{r(r+1)}{2}\right]} \cdot R(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$$
$$= t^{rs} \cdot R(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$$

$\Rightarrow$

$R(x_0, \dots, x_{n-1})$ omogeneo di grado $r \cdot s$

Teorema di Bézout: forma debole

Sia $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$, siano $F, G \in \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]$ omogenei, di gradi r e s

Se $Z_p(F) \cap Z_p(G)$ contiene $r \cdot s + 1$ punti, allora F e G hanno una componente comune.

Dim.: Cons. $P_1, \dots, P_{rs+1} \in Z_p(F) \cap Z_p(G)$

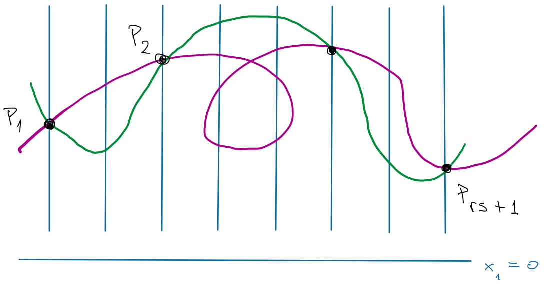
e cons. $\overline{P_i P_j}$ per $i \neq j$

Queste rette sono in numero finito

A meno di proiettività, possiamo supporre

anche che $(0:0:1) \notin \overline{P_i P_j}$ $\forall i, j$ ($\Rightarrow$ l'insieme $\{P_1, P_2, \dots, P_{rs+1}\}$ viene proiettato biunivocamente sulla retta $x_1 = 0$)

e $(0:0:1) \notin Z_p(F)$
$(0:0:1) \in Z_p(G)$



$$F = A_r x_2^r + A_{r-1} x_2^{r-1} + \dots + A_1 \cdot x_2 + A_0$$

$$G = B_s x_2^s + B_{s-1} x_2^{s-1} + \dots + B_1 x_2 + B_0$$

$F(0,0,1) \neq 0$
$= A_r$

$G(0,0,1) \neq 0$
$= B_s$

$$R_{x_2}(F,G) = R(x_0,x_1) = \begin{cases} \equiv 0 \Rightarrow F, G \text{ fattore in comune} \\ \text{omogeneo di grado } r \cdot s \end{cases}$$

Supp.:
$R(x_0,x_1) \in \mathbb{K}[x_0,x_1]$, omogeneo, $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$

$\Rightarrow R(x_0,x_1)$ è prodotto di fattori lineari omogenei del tipo $(c_1 x_0 - c_0 x_1)$

$R(c_0,c_1) = 0$; le coppie $(c_0 : c_1)$ sono al più $r \cdot s$

Cons. $F(c_0,c_1,x_2)$ e $G(c_0,c_1,x_2) = B_s(c_0,c_1)\,x_2^s + B_{s-1}(c_0,c_1)\,x_2^{s-1} + \cdots + B_0(C_1,C_2)$
$= A_r(c_0,c_1)\,x_2^r + A_{r-1}(c_0,c_1)\,x_2^{r-1} + \cdots + A_1(c_0,c_1)\,x_2 + A_0(c_0,c_1)$

$$R\big(F(c_0,c_1,x_2), G(c_0,c_1,x_2)\big) = R_{x_2}(F,G)(c_0,c_1) = 0$$

$\Rightarrow F(c_0,c_1,x_2)$ e $G(c_0,c_1,x_2)$ hanno 1 radice comune: $\exists\ c_2 \in \mathbb{K}$

$$F(c_0,c_1,c_2) = 0 = G(c_0,c_1,c_2)$$

$\Rightarrow (c_0 : c_1 : c_2) \in Z_p(F) \cap Z_p(G)$

Viceversa: se $(c_0 : c_1 : c_2) \in Z_p(F) \cap Z_p(G)$
$\Rightarrow R_{x_2}(F,G)(c_0,c_1) = 0$

Può succedere che $(c_0 : c_1 : c_2)$ e $(c_0 : c_1 : c_2')$
$\in Z_p(F) \cap Z_p(G)$?

no: la retta $\overline{(c_0 : c_1 : c_2)\ (c_0 : c_1 : c_2')}$ passa per il punto $(0:0:1)$

infatti: retta è data dai punti: $(x_0 : x_1 : x_2)$

$$\det\begin{pmatrix} x_0 & x_1 \\ c_0 & c_1 \end{pmatrix} = 0 = c_1 x_0 - c_0 x_1$$

$\Rightarrow$ c'è una biiezione tra

$$\{P_1, \ldots, P_{rs+1}\} \longleftrightarrow \{\text{fattori lineari di } R_{x_2}(F,G)\}$$

$$\# \leq r \cdot s$$

assurdo.